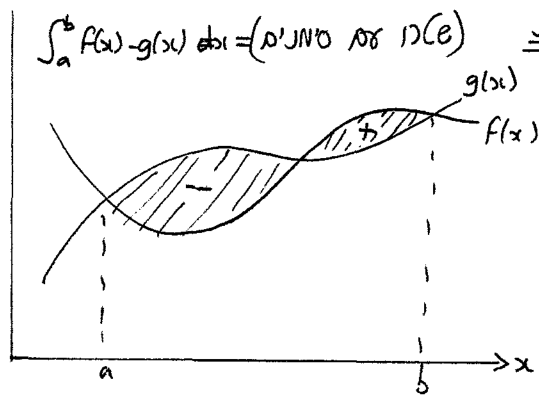
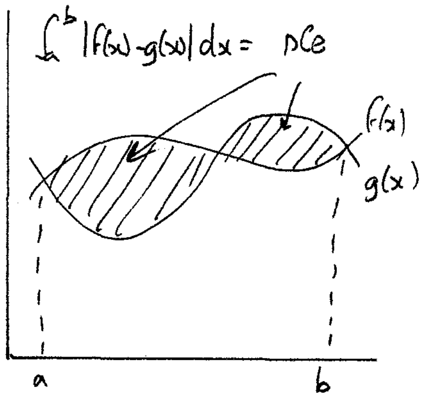
שימושים של אינטגרלים

דוגמאות

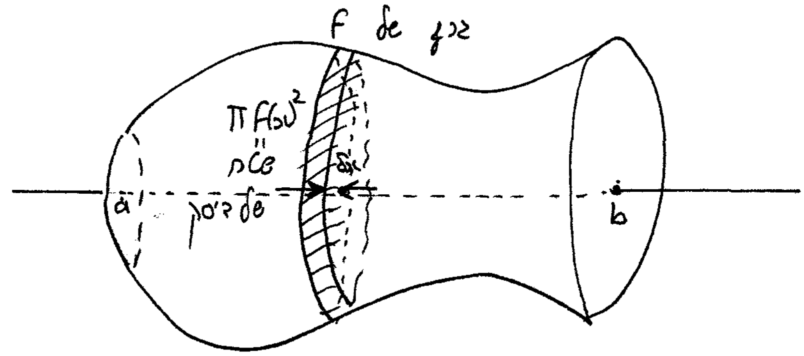
א) $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx =$ (שטח עם סימנים)



ב) $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx =$ שטח



ג)



$$\text{נפח} = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

של גוף סיבוב

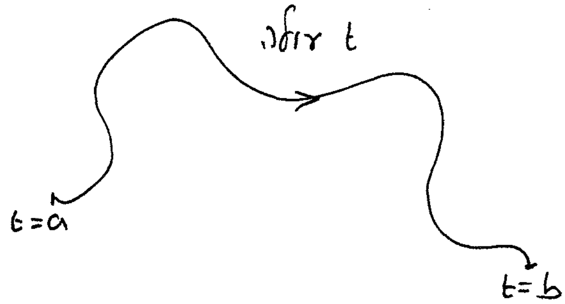
הגדרה של נפח של תחום ב-$\mathbb{R}^3$ באינפי מתקדם !!

ד) אורך של מסילה ב-$\mathbb{R}^2$

נניח ש- $x,y:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות

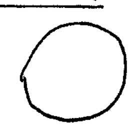
מקבלים מסילה $[a,b]\to\mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (x(t),y(t)) = \underline{f}(t)$$

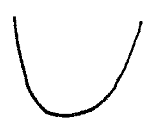


דוגמאות

$x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$

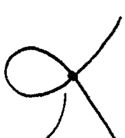


$x(t)=t$, $y(t)=t^2$



$x(t)=t^2$, $y(t)=t^3$

$x(t)=t^2$, $y(t)=t^3-t$

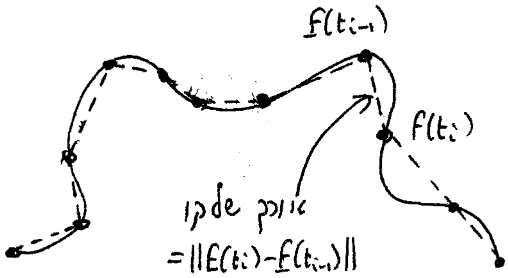


רוצים להגדיר את האורך של המסילה.

עושים דרך אורך של קו-מקוטע שקרוב למסילה

לכל חלוקה $P=(\underset{a}{t_0}<t_1<\dots<\underset{b}{t_n})$

$$l_P(\underline{f}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \|\underline{f}(t_i)-\underline{f}(t_{i-1})\|$$



מה קרה ל- $L_P(f)$ כאשר $\Delta(P)\to 0$?

הגדרה אומרים שלמסילה $\underline{f}$ קיים אורך אם קיים גבול $\lim\limits_{\Delta(P)\to 0} L_P(\underline{f})$
rectifiable curve
ונסמן את הגבול ב- $L(\underline{f})$ = אורך של $\underline{f}$

משפט x,y גזירות ברציפות $\Leftarrow$ ל- $\underline{f}$ קיים אורך $L(\underline{f})=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

הוכחה x גזירה ברציפות $\underset{\text{הערך}}{\overset{\text{משפט}}{\Leftarrow}}$ $\exists u_i\in(t_{i-1},t_i):\ \dfrac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=x'(u_i)$ (1)

y גזירה ברציפות $\underset{\text{הממוצע}}{\Leftarrow}$ $\exists v_i\in(t_{i-1},t_i):\ \dfrac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=y'(v_i)$ (2)

x',y' רציפות על $[a,b]$ $\Leftarrow$ x',y' רציפות במ"ש על $[a,b]$

$\varepsilon>0$ $\Leftarrow$ $\left(\exists\delta>0\ \forall s,t\in[a,b]\ \ |s-t|<\delta\Rightarrow \begin{matrix}|x'(s)-x'(t)|<\varepsilon\\ |y'(s)-y'(t)|<\varepsilon\end{matrix}\right)$ (3)

נניח ש- $\Delta(P)<\delta$

$$\|\underline{f}(t_i)-\underline{f}(t_{i-1})\| = \sqrt{\left((x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2\right)}$$
$$\overset{(1),(2)}{=}(t_i-t_{i-1})\sqrt{\left(x'(u_i)^2+y'(v_i)^2\right)}$$

$\Leftarrow$
$$\left|\frac{\|\underline{f}(t_i)-\underline{f}(t_{i-1})\|}{(t_i-t_{i-1})}-\sqrt{\left(x'(t_i)^2+y'(t_i)^2\right)}\right|$$
$$=\left|\sqrt{\left(x'(u_i)^2+y'(v_i)^2\right)}-\sqrt{\left(x'(t_i)^2+y'(t_i)^2\right)}\right|$$
$$=\left|\,\left\|\begin{pmatrix}x'(u_i)\\ y'(v_i)\end{pmatrix}\right\|-\left\|\begin{pmatrix}x'(t_i)\\ y'(t_i)\end{pmatrix}\right\|\,\right| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} \left\|\begin{pmatrix}x'(u_i)\\ y'(v_i)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'(t_i)\\ y'(t_i)\end{pmatrix}\right\|<\sqrt{2}\,\varepsilon$$

$|t_i-t_{i-1}|\leq\Delta(P)<\delta$
$\Rightarrow \left.\begin{matrix}|t_i-u_i|<\delta\\ |v_i-t_i|<\delta\end{matrix}\right]$
$\overset{(3)}{\Rightarrow}\ \begin{matrix}|x'(u_i)-x'(t_i)|<\varepsilon\\ |y'(v_i)-y'(t_i)|<\varepsilon\end{matrix}$

$$\Rightarrow\left|\overbrace{\sum_{i=1}^n\|\underline{f}(t_i)-\underline{f}(t_{i-1})\|}^{L_P(\underline{f})}-\overbrace{\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})\sqrt{\left(x'(t_i)^2+y'(t_i)^2\right)}}^{\text{סכום רימן של } \int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}}\right|$$

$$\underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq}\sum_{i=1}^n\left|\|\underline{f}(t_i)-\underline{f}(t_{i-1})\|-(t_i-t_{i-1})\sqrt{\left(x'(t_i)^2+y'(t_i)^2\right)}\right|<\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})\sqrt{2}\,\varepsilon=\sqrt{2}\,\varepsilon(b-a)$$

x',y' רציפות $\Leftarrow$ $\sqrt{x'^2+y'^2}$ רציפה ולכן אינטגרבילית

$\Leftarrow$ $\exists\Delta\ \forall P,\Delta(P)<\Delta,\ \left|\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})\sqrt{x'(t_i)^2+y'(t_i)^2}-\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\right|<\varepsilon$

לכן $\Delta(P)<\min(\Delta,\delta)$ $\Leftarrow$ $\left|L_P(\underline{f})-\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\right|<\varepsilon+\sqrt{2}\,\varepsilon(b-a)$ $\Leftarrow$ $L(\underline{f})=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}$

$\square$

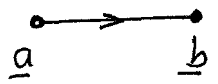
הערות (א) למסילות ב- $\mathbb{R}^n$ אפשר להגדיר אורך כמו ב- $\mathbb{R}^2$

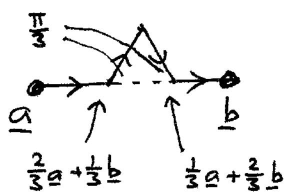
ומקבלים ל $\underline{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות ש-

$$L(\underline{f}) = \int_a^b \left\| \frac{d\underline{f}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df_n}{dt}\right)^2}\, dt$$

(ב) קיימות מסילות בלי אורך (non-rectifiable curves)

Snowflake curve פעולה: קטע ב- $\mathbb{R}^2$ ← קו-מקוטע





לפי פרמטריזציה:

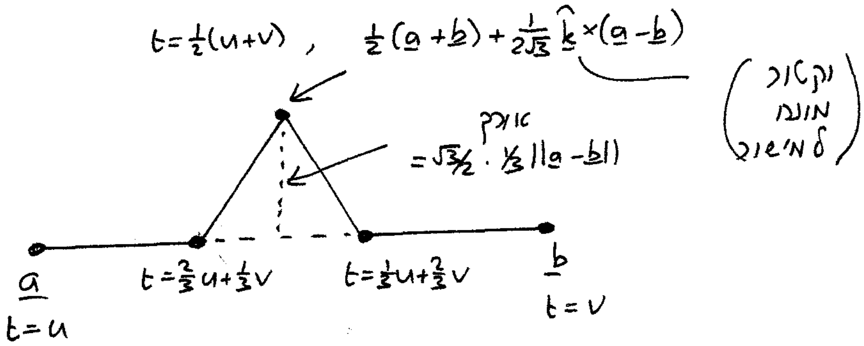
$f:[u,v]\to\mathbb{R}^2 \longrightarrow g:[u,v]\to\mathbb{R}^2$

קטע
$\underline{f}(u)=\underline{a},\ \underline{f}(v)=\underline{b}$

$\underline{f}(t)=\underline{a}+\frac{\underline{b}-\underline{a}}{v-u}(t-u),\quad u\le t\le v$

$\underline{g}(t)=\underline{f}(t),\ t\in(u,\frac23 u+\frac13 v)\cup(\frac13 u+\frac23 v, v)$

כאשר $t\in(\frac23 u+\frac13 v, \frac13 u+\frac23 v)$ מגדירים את g לקבל שני קטעים



תחת הפעולה, קטע אחד $\xleftarrow[\times 4/3]{\text{אורך}}$ איחוד של 4 תת-קטעים

מתחילים בקטע באורך 1 $(0,0)\xrightarrow[F_0]{}(1,0)$ $\Longrightarrow$ מקבלים סדרה של מסילות תחת הפעולה

$F_1, F_2, \dots : [0,1]\to\mathbb{R}^2$

$L(F_n) = (4/3)^n$

תרגיל $\underline{F_n}(t)\longrightarrow\underline{F}(t)$; בדקו שההתכנסות במ"ש

ושהאורך של $\underline{F}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ (רציפה) לא קיים.