Lagrange interpolation: נותנים $(d+1)$ נקודות $(x_i,y_i)_{i=0,1,\dots,d}$ (כל x_i שונים אחד מהשני)

רוצים למצוא פולינום p בדרגת מעלה $\le d$ כך ש- $p(x_i)=y_i \ \forall i$.

דרך הראשונה (א)

פולינום p בדרגת מעלה $\le d$ הוא בצורה:

$p=a$

$p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_dx^d$

תנאים $p(x_i)=y_i \ \forall i$ נותנים:

$$\left\{\begin{aligned} a_0+a_1x_0+\dots+a_dx_0^d&=y_0\\ a_0+a_1x_1+\dots+a_dx_1^d&=y_1\\ &\ \vdots\\ a_0+a_1x_d+\dots+a_dx_d^d&=y_d\end{aligned}\right.$$

מערכת של משוואות לינאריות

קיים פתרון יחיד כי

$$\begin{vmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^d\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^d\\ & \vdots & & \\ 1 & x_d & \cdots & x_d^d\end{vmatrix}=\prod_{i>j}(x_i-x_j)\neq 0$$

Vandermonde determinant

גם אפשר לכתוב את הפתרון ל-(*) דרך כלל Cramer

תרגיל: תבדקו שהפתרון ל- $a_0,\dots,a_d$ מכלל Cramer ל-(*) הוא שקול לנוסחת Newton-Lagrange

הפולינום p מהנוסחה

הצגת נקודות פולינום Lagrange

דרך השניה (ב)

נניח ש- $x_0,\dots,x_d$ $(d+1)$ מספרים שונים וקבועים.

לכן אפשר להגדיר העתקה

$$A:\{\text{פולינומים בדרגת מעלה } \le d\}\longrightarrow\mathbb{R}^{d+1}$$

$$p\longmapsto (p(x_0),\dots,p(x_d))^T$$

A העתקה לינארית בין מרחבים וקטורים:

$$\begin{aligned}A(p+q)&=((p+q)(x_0),\dots,(p+q)(x_d))\\ &=(p(x_0)+q(x_0),\dots,p(x_d)+q(x_d))\\ &=(p(x_0),\dots,p(x_d))+(q(x_0),\dots,q(x_d))\\ &=A(p)+A(q)\end{aligned}$$

$(c\in\mathbb{R})$ $A(c\cdot p)=cA(p)$

מ-(א) אנו יודעים ש- A חח"ע ועל.

הבעיה היא למצוא את $A^{-1}((y_0,\dots,y_d))$

A לינארית $\Leftarrow$ מספיק למצוא את $A^{-1}(e_i)$ כאשר $\{e_i\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^{d+1}$

צ"ל מספיק למצוא את $A^{-1}((0,0,\dots,\underset{\text{מקום ה-}i}{1},0,\dots,0))$

מה הוא $A^{-1}((0,\dots,0,\underset{\text{מקום ה-}i}{1},0,\dots,0))$?

הנו פולינום p כך ש- $\left.\begin{aligned}p(x_j)&=0\\ p(x_i)&=1\end{aligned}\right\}$ $\forall j\neq i$

$p(x_j)=0 \Rightarrow x=x_j$ הוא שורש של $p(x)$

$\Leftarrow$ $(x-x_j)$ מחלק את $p(x)$

$\forall j\neq i\ p(x_j)=0 \Rightarrow \prod_{j\neq i}(x-x_j)$ מחלק את $p(x)$

פולינום בדרגת מעלה d

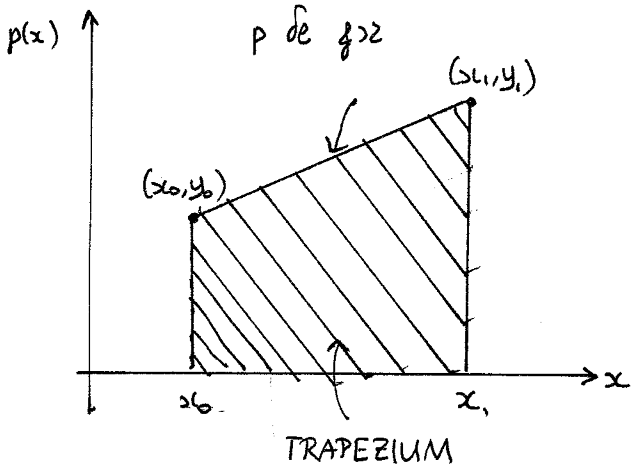
$$\Leftarrow\quad p(x)=\underset{\text{מספר קבוע}}{C}\prod_{j\neq i}(x-x_j)$$

$$p(x_i)=1\ \Rightarrow\ p(x)=\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=A^{-1}(e_i)$$

A^{-1} לינארי $\Leftarrow$ פתרון ל- $Ap=y$ הוא:

$$\boxed{p(x)=\sum_{i=0}^{d}\frac{y_i}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}\cdot\prod_{j\neq i}(x-x_j)}=\sum_{i=0}^{d}y_iA^{-1}(e_i)=A^{-1}\left(\sum_{i=0}^{d}y_ie_i\right)=A^{-1}((y_0,\dots,y_d))$$

דוגמאות



א) $d=1$: פולינום לינארי p
$$\left.\begin{aligned} p(x_0)&=y_0 \\ p(x_1)&=y_1 \end{aligned}\right\}$$

פיתרון

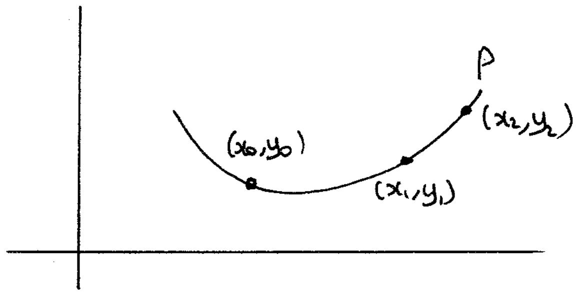
$$p(x)= y_0\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{y_0(x-x_1)-y_1(x-x_0)}{(x_0-x_1)}=\underline{\underline{\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x+\frac{x_0y_1-x_1y_0}{x_0-x_1}}}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}p=\left[y_0\cdot\frac{1}{2}\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)}+y_1\cdot\frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)}\right]_{x_0}^{x_1}$$

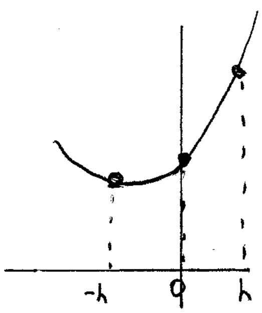
$$=y_0\cdot\frac{1}{2}(x_1-x_0)+y_1\cdot\frac{1}{2}(x_1-x_0)$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}(y_0+y_1)(x_1-x_0)}$$ שטח של TRAPEZIUM



ב) $d=2$: פולינום במעלה 2
$$p(x_0)=y_0,\quad p(x_1)=y_1,\quad p(x_2)=y_2$$

$$p(x)=y_0\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$



ג) $d=2,\ x_0=-h,\ x_1=0,\ x_2=h$ $(h\neq 0)$

העתקה לינארית $\mathbb{R}^3 \leftarrow V=$ {פולינומים במעלה ≤ 2}

$$p\longmapsto\begin{pmatrix}p(-h)\\p(0)\\p(h)\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{x(x-h)}{2h^2}\qquad A^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{x^2-h^2}{-h^2}\qquad A^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{x(x+h)}{2h^2}$$

$$\mathbb{R}^3\xrightarrow{A^{-1}}V\xrightarrow{\int_{-h}^{h}}\mathbb{R}$$

$$\longmapsto\frac{x(x-h)}{2h^2}\longmapsto h/3$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\frac{x^2-h^2}{-h^2}\longmapsto 4h/3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\longmapsto\frac{x(x+h)}{2h^2}\longmapsto h/3$$

$\Longleftarrow$ לפולינום p במעלה ≤ 2 כך ש-
$$\left.\begin{aligned}p(-h)&=y_0\\p(0)&=y_1\\p(h)&=y_2\end{aligned}\right\}$$
אז
$$\boxed{\int_{-h}^{h}p=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)}$$

שימוש לפולינום Lagrange לאינטגרציה נומרית

רוצים קירוב ל- $\int_a^b f$.
מעריכים של f
במספר סופי
של נקודות ב- $[a,b]$

$\longrightarrow$ מחלק את $[a,b]$
ל- nd חלקים
$x_0, x_1, \dots, x_{nd}$
($x_0 = a$, $x_{nd} = b$)

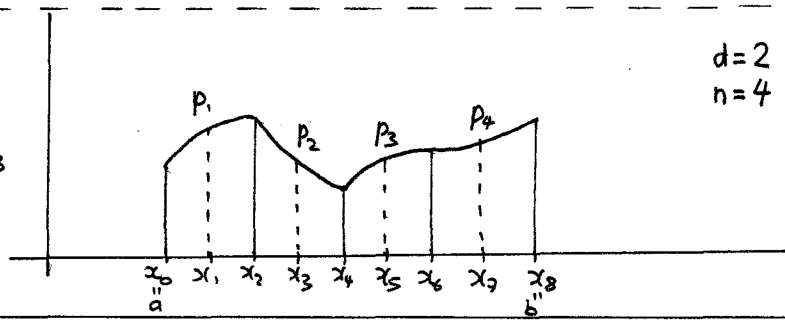
$\longrightarrow$ מוצא בכל קטע
$[x_{(r-1)d}, x_{rd}]$ $(r=1,2,\dots,n)$
את הפולינום p_r בעלת מעלה $\le d$
כך ש- $p_r(x_i) = f(x_i)$
$i=(r-1)d, \dots, rd-1, rd$

$\downarrow$

משתמשים ב- p_r כקירוב
ל- f על $[x_{(r-1)d}, x_{rd}]$ $\longrightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \sum_{r=1}^{n} \left(\int_{x_{(r-1)d}}^{x_{rd}} p_r \right)}$$

$$\int_a^b f \approx \int_{x_0}^{x_2} p_0 + \int_{x_2}^{x_4} p_1 + \int_{x_4}^{x_6} p_2 + \int_{x_6}^{x_8} p_3$$



$d=2$
$n=4$

דוגמאות

נסמן את $f(x_i)$ ב- f_i .

א) $d=1$: קירוב ע"י פונקציות ליניאריות

$$\int_a^b f \approx \sum_{r=1}^{n} \tfrac{1}{2}(f_{r-1}+f_r)(x_r - x_{r-1})$$

במקרה ש- $x_i - x_{i-1} = h$ $\forall i$

$$\int_a^b f \approx h/2 \sum_{r=1}^{n} (f_{r-1}+f_r)$$

$$= h\left(\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right)$$

כאשר $b-a = nh$

Trapezium rule

ב) $d=2$, במקרה ש- $x_i - x_{i-1} = h$ $\forall i$ $(b-a=2nh)$

$$\int_a^b f \approx \sum_{r=1}^{n} h/3\,(f_{2r-2} + 4f_{2r-1} + f_{2r})$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right)$$

Simpson's rule

ג) קירוב ע"י (פולינום בעלת מעלה 0) = (פונקציה קבועה)

ערך $f(t_i)$ על כל קטע $[x_{i-1}, x_i)$

$\Downarrow$

קירוב ל- $\int_a^b f$ הוא סכום רימן $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i)$

Error bound for Simpson's rule

נניח ש- f גזירה ברציפות $(d+1)$ פעמים, וגם $|f^{(d+1)}(x)|\le M$ על $[a,b]$.

שאלה: תן חסם ל- $\left|\int_{x_0}^{x_d} f-\int_{x_0}^{x_d} p\right|$ כאשר p הנו פולינום בדרגת מעלה $\le d$

עם $p(x_i)=f(x_i) \quad (i=0,1,\dots,d)$

נגדיר $g=f-p \Rightarrow \underset{i=0,1,\dots,d}{g(x_i)=0}$, $\underset{x\in[x_0,x_d]}{|g^{(d+1)}(x)|\le M}$; נמצא חסם ל- $\left|\int_{x_0}^{x_d} g\right|$

Trapezium Rule

$(d=1)$ * נניח ש- $g(a)=g(b)=0$, $\underset{x\in[a,b]}{|g''(x)|\le M}$

* g גזירה ברציפות פעמיים

מה יודעים על $\left|\int_a^b g\right|$?

$g(a)=g(b)=0 \Rightarrow \exists u\in(a,b): g'(u)=0$

$|g''(x)|\le M \Rightarrow$ לכל $x \in [a,b]$

$$|g'(x)| \overset{g'(u)=0}{=} |g'(x)-g'(u)| = \left|\int_u^x g''(y)\,dy\right| \le M|x-u|$$

$$\Rightarrow |g(x)| \overset{g(a)=0}{=} |g(x)-g(a)| = \left|\int_a^x g'(y)\,dy\right| \le \left|M\int_a^x |y-u|\,dy\right| \le \frac{M}{2}\left((x-u)^2+(a-u)^2\right)$$

$$\left|\int_a^b g\right| \le \int_a^b \frac{M}{2}\left((x-u)^2+(a-u)^2\right)dx = \frac{M}{6}\left[(x-u)^3\right]_a^b+\frac{M}{2}(a-u)^2(b-a) \le \frac{M}{6}(b-a)^3+\frac{M}{2}(b-a)^3$$

$$\boxed{\left|\int_a^b f - \text{קירוב ע"י trapezium rule}\right| \le \frac{2}{3}M\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^3 \le \frac{2}{3}M(b-a)\Delta(P)^2} \Leftarrow \boxed{\left|\int_a^b g\right| \le \frac{2}{3}M(b-a)^3}$$

Simpson's Rule

$t_0 \quad t_1$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2$

$(d=2)$ נניח * g גזירה ברציפות שלוש פעמים

* $|g'''(x)|\le M \quad x\in[x_0,x_2]$

* $g(x_0)=g(x_1)=g(x_2)=0$

$\Rightarrow \left|\int_{x_0}^{x_2} g\right| < ?$

$$\begin{cases} g'(t_0)=0 \Leftarrow g(x_0)=g(x_1) \\ g'(t_1)=0 \Leftarrow g(x_1)=g(x_2) \end{cases} \quad t_0\in(x_0,x_1),\ t_1\in(x_1,x_2)$$

$$\Rightarrow \underset{u\in(t_0,t_1)}{g''(u)=0} \Rightarrow |g''(x)| = \left|\int_u^x g'''\right| \le M|x-u| \Rightarrow |g'(x)| = \left|\int_{t_0}^x g''\right| \le \frac{M}{2}\left((x-u)^2+(t_0-u)^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$|g(x)| = \left|\int_{x_1}^x g'\right| \le \frac{M}{2}\left|\int_{x_1}^x (x-u)^2+(t_0-u)^2\,dx\right| = \frac{M}{6}\left(|x-u|^3+|x_1-u|^3\right)+\frac{M}{2}(t_0-u)^2|x-x_1|$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x_2} g\right| &\le \frac{M}{6}\int_{x_0}^{x_2} |x-u|^3+|x_1-u|^3\,dx + \frac{M}{2}(t_0-u)^2\int_{x_0}^{x_2}|x-x_1|\,dx \\ &\le \frac{M}{24}\left((x_2-u)^4+(x_0-u)^4\right)+\frac{M}{6}|x_1-u|^3(x_2-x_0)+\frac{M}{4}(t_0-u)^2\left[(x_2-x_1)^2+(x_0-x_1)^2\right] \\ &\le \frac{M}{24}(2h)^4+\frac{M}{6}h^3(2h)+\frac{M}{4}(2h)^2(2h^2)=3Mh^4 \quad (\text{כאשר } x_1-x_0=x_2-x_1=h)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{לכן } |f'''(x)|\le M,\ \forall i\ x_i-x_{i-1}=h\ \left((b-a)=2nh\right) \Rightarrow \left|\int_a^b f - \text{קירוב ע"י Simpson's rule}\right| \le 3Mnh^4}$$