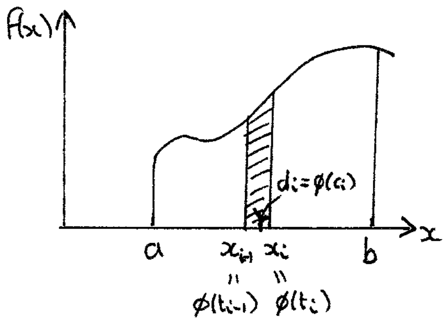
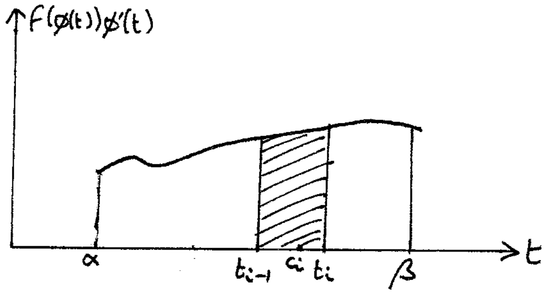
סוג שני של הצבה לאינטגרלים מסוימים

משפט
* f אינטגרבילית על $[a,b]$
* ϕ פונקציה גזירה ברציפות על $[\alpha,\beta]$
* $\phi(\alpha)=a,\ \phi(\beta)=b$
* ϕ עולה ממש

$\Leftarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$

הוכחה





נניח $\varepsilon>0$

f אינטגרבילית $\Rightarrow$ $\left(\exists\delta>0:\ \forall \underset{(a<x_1<\cdots<x_n=b)}{\overset{\text{חלוקה}}{P}},\ \Delta(P)<\delta,\ \forall u_i\in(x_{i-1},x_i)\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f\right|<\varepsilon\right)$

$\Downarrow$

f חסומה, $\exists M: |f(x)|<M,\ \forall x\in[a,b]$

ϕ רציפה על $[\alpha,\beta]$ $\Leftarrow$ ϕ רציפה במ"ש

$\Leftarrow\left(\exists\Delta_1>0:\ s,t\in[\alpha,\beta]\ \ |s-t|<\Delta_1\Rightarrow|\phi(s)-\phi(t)|<\delta\right)$

ϕ' רציפה על $[\alpha,\beta]$ $\Leftarrow$ ϕ' רציפה במ"ש

$\Leftarrow\left(\exists\Delta_2>0:\ s,t\in[\alpha,\beta]\ \ |s-t|<\Delta_2\Rightarrow|\phi'(s)-\phi'(t)|<\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}\right)$

נגדיר $\Delta=\min(\Delta_1,\Delta_2)$. נניח ש- $Q=(\underset{\alpha}{t_0}<t_1<\cdots<\underset{\beta}{t_n})$ חלוקה של $[\alpha,\beta]$ עם $\Delta(Q)<\Delta$.

ונניח ש- $c_i\in[t_{i-1},t_i)$

נסמן $x_i=\phi(t_i)$, $d_i=\phi(c_i)$ $\overset{\phi \text{ עולה ממש}}{\Rightarrow}$ $d_i\in(x_{i-1},x_i)$

$\Delta(Q)<\Delta_1\Rightarrow|t_i-t_{i-1}|<\Delta_1\Rightarrow|x_i-x_{i-1}|<\delta\Rightarrow$ $\circledast$ $\left|\sum_{i=1}^n f(d_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f\right|<\varepsilon$

משפט הערך הממוצע $\Rightarrow$ $\forall i,\ |\phi'(c_i)(t_i-t_{i-1})-(x_i-x_{i-1})|$

$=|t_i-t_{i-1}|\cdot\left|\phi'(c_i)-\underbrace{\frac{\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}}_{\substack{=\phi'(v_i)\\ \exists v_i\in(t_{i-1},t_i)}}\right|<\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}\cdot|t_i-t_{i-1}|$

$c_i,v_i\in(t_{i-1},t_i)\ \Downarrow\ |c_i-v_i|<|t_i-t_{i-1}|<\Delta\le\Delta_2$

$\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^n f(d_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n f(\phi(c_i))\phi'(c_i)(t_i-t_{i-1})\right|\le\sum_{i=1}^n|f(d_i)|\cdot|(x_i-x_{i-1})-\phi'(c_i)(t_i-t_{i-1})|$

$<\sum_{i=1}^n M\cdot\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}\cdot|t_i-t_{i-1}|=\varepsilon$

$\circledast\Rightarrow\left(\left|\sum_{i=1}^n f(\phi(c_i))\phi'(c_i)(t_i-t_{i-1})-\int_a^b f\right|<2\varepsilon \quad \Delta(Q)<\Delta,\ Q=(\underset{\alpha}{t_0}<t_1<\cdots<\underset{\beta}{t_n}),\ c_i \text{ לכל}\right)\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt=\int_a^b f.$

$\square$

הערות א) דרך משפט היסודי, ב״ה משפט (דף 26) בלי צורך ש-ϕ עולה ממש
במקרה ש-f פונקציה רציפה

ב)

$\phi(t) = t^2$

$\alpha = -2$

$\beta = 3$

$f(x) = x$

$$\int_4^9 x\,dx = \int_{-2}^3 t^2 \cdot 2t\,dt \Leftarrow \text{(עמ' 26)}$$

$$\left[x^2/2\right]_4^9 \qquad \left[t^4/2\right]_{-2}^3$$

ג)

$\phi(t) = t^2$

$\alpha = -2$

$\beta = 3$

$\phi: [-2,3] \to [0,9]$

$f: [0,9] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \int_{-2}^3 |t| \cdot 2t\,dt$$

$$= \int_2^3 |t| \cdot 2t\,dt$$

ד) צריך להזהר כאשר ϕ לא פונקציה הפיכה.

$$\int_{-2}^3 t^2\,dt \underset{\substack{x=t^2 \\ dx=2t\,dt}}{\overset{\neq}{=}} \int_4^9 \sqrt{x} \cdot \tfrac{1}{2}\,dx$$

$$\left[t^3/3\right]_{-2}^3 = 35/3$$

$$= \left[\tfrac{1}{3} x^{3/2}\right]_4^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(27-8) = 19/3$$

$$\int g(t)\,dt \underset{\substack{x=\phi(t) \\ dx=\phi'(t)\,dt}}{\xrightarrow[=]{\text{צריך } \phi \text{ פונק' הפיכה}}} \int g(\phi^{-1}(x)) \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}\,dx$$

ה) התנאים במשפט בדף 36 אומרים ש-ϕ diffeomorphism מ-$[\alpha,\beta]$ ל-$[a,b]$
(של ϕ)

$\phi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$

ϕ גזירה ברציפות

ϕ פונקציה עולה ממש $\Rightarrow$ $\phi^{-1}: [a,b] \to [\alpha,\beta]$
מוגדרת היטב

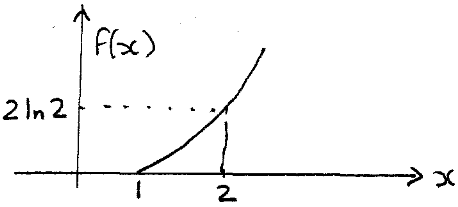
אינטגרציה נומרית

שימושים של סכומי Riemann

א) מצא את $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (1+r/n) \ln(1+r/n)}$

הוא סכום $\bar{S}_{P_n}(f)$ של $\int_1^2 \underbrace{x \ln x}_{f(x)} dx$ לפי החלוקה $P_n = (1 < 1+\frac{1}{n} < \dots < 2)$

$x_i = 1 + i/n,\ 0 \le i \le n$



$$\bar{S}_{P_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= 1/n} \underbrace{\sup_{(x_{i-1},x_i)} f}_{= f(x_i)}$$

(f פונקציה עולה)

$$\Delta(P_n) = 1/n$$

f רציפה ⇐ f אינטגרבילית

$$\Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty} \bar{S}_{P_n}(f) = \int_1^2 f$$

$$= \int_1^2 x \ln x \, dx$$

$$\overset{\text{לפי חלקים}}{=} \left[\ln x \int x\,dx - \int \frac{1}{x}\left(\int x\,dx\right) dx\right]_1^2$$

$$= \left[\ln x \cdot x^2/2 - \int x/2 \, dx\right]_1^2$$

$$= \left[\ln x \cdot x^2/2 - x^2/4\right]_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 1) - (-1/4)$$

$$= \underline{\underline{2\ln 2 - 3/4}}$$

ב) f פונקציה גזירה על $[a,b]$, $|f'(x)| < M$, לכל x ב $[a,b]$

⇐ לפי חלוקה P,

$$\bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\left(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f - \inf_{(x_{i-1},x_i)} f\right)}$$

f רציפה ⇐ $f(c_i) - f(d_i)$ $\quad \exists c_i, d_i \in (x_{i-1}, x_i)$

משפט הערך הממוצע ⇐ $(c_i - d_i) f'(\xi_i)$ (קיים ξ_i בין c_i ובין d_i)

$$< \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 M \quad \Leftarrow \quad |(c_i - d_i) f'(\xi_i)| < |x_i - x_{i-1}| \cdot |f'(\xi_i)| \le M |x_i - x_{i-1}|$$

$$\Rightarrow \left| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)}_{\text{סכום Riemann}} - \int_a^b f \right| \le \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \le M \Delta(P)(b-a)$$

שני מספרים בין $\underline{S}_P(f)$ ובין $\bar{S}_P(f)$

$$\boxed{\left|\text{סכום Riemann} - \int_a^b f\right| < M \cdot \Delta(P) \cdot (b-a)}$$