אינטגרציה של פונקציה רציונלית כללית

פירוק לשברים חלקיים

METHOD OF PARTIAL FRACTIONS

שיטה א': דרך מספרים מרוכבים

$$\boxed{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}$$
p,q פולינומים

משפט היסודי באלגברה: קיימים מספרים $\alpha_i \in \mathbb{C}$ (שורשים של q)
ומספרים טבעיים $e_i \in \mathbb{N}$ (כפילות של השורש α)
כך ש- $q(x) = (\text{קבוע})\cdot\prod_i (x-\alpha_i)^{e_i}$

מקדם של החזקה הכי גדולה ב-q

פירוק לשברים חלקיים: קיימים פולינומים $f(x)$ ו- $g(x)$ כך ש-

$$\frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_i \frac{g_i(x)}{(x-\alpha_i)^{e_i}}$$

בעלת מעלה $< e_i$

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \Longleftarrow$ מספיק לעשות אינטגרלים בצורה $\int \frac{g(x)}{(x-\alpha)^e}\,dx$

הצבה $y = x-\alpha$

פולינום ב-y בעלת מעלה $< e$

$$\int \frac{g(y+\alpha)}{y^e}\,dy = \int \frac{a_{e-1}y^{e-1}+\dots+a_1 y + a_0}{y^e}\,dy$$

$$= \int a_{e-1}\frac{1}{y} + \dots + a_1\frac{1}{y^{e-1}} + a_0\cdot\frac{1}{y^e}\,dy$$

$\frac{1}{y} \to \ln y$

$\int \frac{dy}{y^n} = \frac{y^{1-n}}{1-n}$ (+ קבוע), $n>1$

הערה אפשר לכתוב פירוק לשברים חלקיים מייד בצורה:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_i \left(\sum_{j=1}^{e_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \right)$$

a_{ij} – מספרים

$\int f(x)$: יודעים

$j=1:\ a_{ij}\ln(x-\alpha_i)$

$j>1:\ \frac{a_{ij}}{1-j}\cdot(x-\alpha_i)^{1-j}$

תזכורת על מספרים מרוכבים
complex numbers

$a,b\in\mathbb{R},\quad z = a+ib$

צמוד (conjugate) $\bar{z} = a-ib$

$z\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2,\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (modulus), $a = \mathrm{Re}(z)$ (real part)

$b = \mathrm{Im}(z)$ (imaginary part)

$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) \Leftarrow i^2=-1$

$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

כאשר $z = |z|\cdot e^{i\theta}$

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\theta + 2\pi i\cdot \text{מספר שלם}}$$

$\theta = \arg(z) \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

argument

$(=\tan^{-1}(b/a))$

עד כדי $+\pi$

רציונאליות : שיטה א'

(א)

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Downarrow \times (x^2+3x+2)$$

$$1=A(x+2)+B(x+1)$$

או

מקדמים:

$$x:\ 0=A+B$$
$$1:\ 1=2A+B$$
$$\Rightarrow A=1,\ B=-1$$

או

$$x=-1 \Rightarrow 1=A$$
$$x=-2 \Rightarrow 1=-B$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx=\int \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\,dx$$

$$=\ln|x+1| -\ln|x+2| + \text{קבוע}$$

(ב)

$$\int \frac{x+5}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

$$\frac{x+5}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Downarrow \times (x^2+3x+2)$$

$$x+5=A(x+2)+B(x+1)$$

או

מקדמים

comparison of coefficients

$$x:\ 1=A+B$$
$$1:\ 5=2A+B$$
$$\Rightarrow A=4,\ B=-3$$

או

evaluation

$$x=-1 \Rightarrow 4=A$$
$$x=-2 \Rightarrow 3=-B$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+3x+2}\,dx=\int \frac{4}{x+1}-\frac{3}{x+2}\,dx$$

$$=4\ln|x+1|-3\ln|x+2| + \text{קבוע}$$

(ג)

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)$$
$$=\underbrace{(x-1)^2}_{\text{כפולות}}(x+1)$$

$$\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Downarrow$$

$$x+5=(Ax+B)(x+1)+C(x-1)^2$$

מקדמים:

$$x^2:\ 0=A \qquad +C \Rightarrow C=-A$$
$$x:\ 1=A+B-2C \Rightarrow 1=3A+B$$
$$1:\ 5=\qquad B+C \Rightarrow 5=-A+B$$

$$\Downarrow$$

$$C=1 \Leftarrow A=-1,\quad B=4$$

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\int \frac{-x+4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=\int \frac{-(x-1)+3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln|x+1| + \text{קבוע}$$

או

$$\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)}+\frac{C}{(x+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$x+5=D(x+1)+E(x-1)(x+1)+C(x-1)^2$$

מקדמים:

$$x^2:\ 0=\qquad E+C \Rightarrow E=-C$$
$$x:\ 1=D \qquad -2C \Rightarrow 1=D-2C$$
$$1:\ 5=D-E+C \Rightarrow 5=D+2C$$

$$\Downarrow$$

$$D=3$$
$$E=-1 \Leftarrow C=1$$

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\int \frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$=-\frac{3}{x-1}-\ln|x-1|+\ln|x+1| + \text{קבוע}$$

(ד)

$$\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$x^3=\underbrace{(x-3)}_{\text{מנה}}(x^2+3x+2)+\overbrace{(7x+6)}^{\text{שארית}}$$

$$\frac{x^3}{x^2+3x+2}=(x-3)+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}$$

$$=(x-3)+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Downarrow$$

$$7x+6=A(x+2)+B(x+1)$$

$$x=-1 \Rightarrow -1=A$$
$$x=-2 \Rightarrow -8=-B$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\,dx=\int (x-3)-\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x+2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x-\ln|x+1| + 8\ln|x+2| + \text{קבוע}$$

(ה)

$$\int \frac{x+5}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$$
$$=(x+1)(x+i)(x-i)$$

$$\frac{x+5}{x^3+x^2+x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+i}+\frac{C}{x-i}$$

$$x+5=A(x^2+1)+B(x+1)(x-i)+C(x+1)(x+i)$$

$$x=-1:\ 4=2A \Rightarrow A=2$$

$$x=i:\ i+5=C(i+1)(2i) \Rightarrow C=\frac{i+5}{2i-2}$$

$$x=-i:\ 5-i=B(1-i)(-2i) \Rightarrow B=\frac{5-i}{-2i-2}$$

$$\int \frac{x+5}{x^3+x^2+x+1}\,dx = I$$

$$=2\ln(x+1)+B\ln(x+i)+C\ln(x-i)$$

$$B=\frac{5-i}{-2-2i}=\frac{(5-i)(-2+2i)}{(-2-2i)(-2+2i)}=\frac{-8+12i}{8}=-1+\frac{3}{2}i$$

$$C=\frac{i+5}{2i-2}=\frac{(5+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}=\frac{-8-12i}{8}=-1-\frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow \boxed{I=2\ln|x+1|-\ln(x^2+1)+3\tan^{-1}x + \text{קבוע}}$$

$$\xleftarrow{\times -1}\ \ln(x+i)+\ln(x-i)=\ln(x^2+1)$$

$$\xleftarrow{\times \frac{3}{2}}\ i(\ln(x+i)-\ln(x-i))=-2\tan^{-1}\frac{1}{x}$$
$$=2\tan^{-1}x + \text{קבוע}$$

הערה להשתמש בשיטה א' כאשר יש p-q שורשים לא ממשיים, צריך

א) להגדיר אינטגרל של פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ לפי $\int f \equiv (\int u) + i(\int v)$

$f(x) = u(x) + iv(x)$

ב) לבדוק שלפי ההגדרה ⑪ והגדרה של $\ln$,

תרגיל! במקרה כללי → $\begin{cases} \int \frac{1}{x+c}\,dx = \ln(x+c) + \text{קבוע} & c \in \mathbb{C} \\ n>1 \quad \int \frac{1}{(x+c)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}(x+c)^{1-n} + \text{קבוע} \end{cases}$

לדוגמא:

$$\int \frac{1}{(x+i)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{1}{(x+i)^2} = \frac{1}{x^2-1+2ix} = \frac{x^2-1-2ix}{(x^2-1+2ix)(x^2-1-2ix)} = \frac{x^2-1-2ix}{(x^2-1)^2+(2x)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} - i\,\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+i)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{} - i \cdot \underbrace{\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx}_{}$$

$x = \tan\theta$, $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + \text{קבוע} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{\tan^2\theta - 1}{(\sec^2\theta)^2}\cdot \sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int (\tan^2\theta - 1)\cdot\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= -\int (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta$$
$$= -\int \cos 2\theta\, d\theta$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$= -\sin\theta\cos\theta$$
$$= -\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+i)^2}\,dx = -\frac{x}{1+x^2} + \frac{i}{1+x^2} + \text{קבוע}$$
$$= \frac{i-x}{1+x^2} + \text{קבוע} = \underline{\underline{-\frac{1}{i+x} + \text{קבוע}}}$$

לדוגמא:

$$\int \frac{1}{(x+i)}\,dx = ? \qquad \frac{1}{x+i} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{i}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x+i}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - i\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - i\tan^{-1}x + \text{קבוע}$$
$$= \ln \underbrace{\sqrt{(1+x^2)}}_{|x+i|} + i\,\underbrace{\tan^{-1}(1/x)}_{\arg(x+i)} + \text{קבוע}$$
$$= \underline{\underline{\ln(x+i) + \text{קבוע}}}$$

שיטה ב׳: דרך פונקציות ממשיות

$$\boxed{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}$$

כאשר p,q פולינומים ממשיים
ול-q קיימים שורשים לא ממשיים

q פולינום ממשי $\Leftarrow$ לכל שורש z ל-q, גם $\bar{z}$ שורש
$(q(z)=0 \Leftarrow q(\bar{z})=0)$

וגם הכפליות של $z,\bar{z}$ שווים.

z שורש של q $\Leftarrow$ $\begin{cases} \text{או } z\in\mathbb{R} \\ \text{או } z,\bar{z}\notin\mathbb{R} \text{ שורשים} \end{cases}$

$$q(x) = (\text{קבוע})\cdot \prod_i (x-\alpha_i)^{e_i}$$

$$= (\text{קבוע})\cdot \prod_{\substack{\text{שורשים}\\\text{ממשים}}} (x-\alpha_i)^{e_i} \cdot \prod_{\substack{\text{זוגות}\\\text{של שורשים}\\\text{לא ממשים}}} \underbrace{(x-(a_j+ib_j))^{e_j}(x-(a_j-ib_j))^{e_j}}_{=\,(x^2-2a_jx+(a_j^2+b_j^2))^{e_j}}$$

תמיד אפשר לכתוב את q בצורה:

בלי שורשים ממשים

$$\boxed{q(x) = (\text{קבוע})\cdot \prod_i (x-\alpha_i)^{e_i} \prod_j (x^2+c_jx+d_j)^{e_j}}$$

$\alpha_i\in\mathbb{R}$, $e_i\in\mathbb{N}$; $c_j,d_j\in\mathbb{R}$, $e_j\in\mathbb{N}$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{f(x)}_{\text{פולינום}} + \sum_i \frac{g_i(x)}{(x-\alpha_i)^{e_i}} + \sum_j \frac{h_j(x)}{(x^2+c_jx+d_j)^{e_j}}$$

g_i פולינום במעלה $< e_i$

h_j פולינום במעלה $< 2e_j$

$\int f$ $\Rightarrow$ ידועים (פולינום)

$\int \frac{g_i(x)}{(x-\alpha_i)^{e_i}}$ $\Rightarrow$ ידועים $\begin{pmatrix} \ln|x-\alpha_i| \\ (x-\alpha_i)^{-k} \end{pmatrix}$

$$\int \frac{h_j(x)}{(x^2+c_jx+d_j)^{e_j}}\,dx \xrightarrow[\text{complete the square}]{u=x+c_j/2} \int \frac{\text{פולינום}}{(u^2+b_j^2)^{e_j}}\,du$$

$$x^2+c_jx+d_j = u^2+\underbrace{(d_j-c_j^2/4)}_{=b_j^2>0}$$

$u/b_j = t$

$$\int \frac{\text{פולינום}}{(t^2+1)^{e_j}}\,dt \;:\; \text{מספיק לעשות} \int \frac{t^n}{(t^2+1)^e}\,dt \quad (0\le n<2e)$$

n אי זוגי, $n=2m+1$ $(0\le m<e)$:

$$\int \frac{t^{2m+1}}{(t^2+1)^e}\,dt$$

$\| \; s=t^2+1,\ ds=2t\,dt$

$$\int \frac{(s-1)^m}{s^e}\cdot\frac{1}{2}\,ds$$

$\left.\begin{matrix}\ln|s| \\ s^{-k}\end{matrix}\right\}$ ידועים

n זוגי, $n=2m$ $(0\le m<e)$:

$t=\tan\theta$, $dt=\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int \frac{(\tan\theta)^n}{(\sec^2\theta)^e}\cdot \sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int (\sin\theta)^n(\cos\theta)^{2e-2-n}\,d\theta$$

$$= \int \underbrace{(\sin\theta)^{2m}(1-\sin^2\theta)^{\overset{e-1-m}{\ge 0}}}_{\text{פולינום ב-}\sin\theta \;\Rightarrow\; \text{ידועים}}\,d\theta$$

33

תרגיל

$$\int \frac{dx}{1+x^3}$$

$$1+x^3 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

מקדמים

$$\begin{array}{llll} x^2: & 0 = A + B & \Rightarrow B = -A & \\ x: & 0 = -A + B + C & \Rightarrow 0 = -2A + C & \\ 1: & 1 = A \quad + C & \Rightarrow 1 = A + C & \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = \tfrac{1}{3},\ C = \tfrac{2}{3} \Rightarrow B = -\tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-x/3 + 2/3}{x^2-x+1}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2-x+1) = 2x-1$$

$$\ln|x^2-x+1| = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$$ לכן יוצרים

קבוע+

לקבל מקדם $-\frac{1}{3}$ ל-x

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/6\,(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{1/2}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2-x+1}}$$

$$x^2-x+1 = (x-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}$$

$$\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du \qquad (u = x - \tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3/4}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3/4}}$$ קבוע+

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\tfrac{1}{2})\right)$$ קבוע+

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2+1} &= \tan^{-1} u \\ \int \frac{du}{u^2+a^2} &= \int \frac{\frac{1}{a^2}\,du}{(u/a)^2+1} \\ &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\tfrac{1}{2})\right) + \text{קבוע}}$$

נוסחות

$$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$$
$$\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$
$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\tfrac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$
$$\tfrac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$$
$$\tfrac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \sec^2\theta$$
$$\tfrac{d}{d\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$$
$$\tfrac{d}{d\theta}(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta$$
$$\tfrac{d}{d\theta}(\operatorname{cosec}\theta) = -\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$$

$$t = \tan\theta/2$$
$$\frac{2t}{1-t^2} = \tan\theta$$
$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin\theta$$
$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta$$

$$\tfrac{d}{dt}(\tan^{-1}t) = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \underset{\text{קבוע} +}{\tan^{-1}t}, \quad \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \underset{\text{קבוע} +}{\tfrac{1}{a}\tan^{-1}(t/a)}$$

$$\tfrac{d}{dt}(\sin^{-1}t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}\,dt = \underset{\text{קבוע} +}{\sin^{-1}t}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \underset{\text{קבוע} +}{\sin^{-1}(t/a)}$$

$$\tfrac{d}{dt}(\cos^{-1}t) = \frac{-1}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

$$\sin\pi/4 = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$$
$$\tan\pi/4 = 1$$
$$\sin\pi/3 = \sqrt{3}/2 = \cos\pi/6$$
$$\sin\pi/6 = 1/2 = \cos\pi/3$$
$$\tan\pi/3 = \sqrt{3}$$
$$\tan\pi/6 = 1/\sqrt{3}$$