$\boxed{23}$

הגדרה לפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, נגדיר $\mathcal{A}_{[a,b]}(f)=\{F:[a,b]\to\mathbb{R} \mid F'=f\}$

anti-derivatives

הערות * $F\in\mathcal{A}_{[a,b]}(f)$ נקראת פונקציה קדומה של f (primitive)

* אם $F,G\in\mathcal{A}_{[a,b]}(f)$, אז $F-G$ = פונקציה קבועה

* נסמן את איבר של $\mathcal{A}_{[a,b]}(f)$ ב- $\int f$ או $\int f(x)dx$ (indefinite integral)

(מוגדרת רק עד כדי + קבוע)

הגדרה אם $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה ו- $a,b\in D$ אז $[f]_a^b \equiv f(b)-f(a)$

הערה: בספרות, יש סימנים $f|_a^b$, $f|_{x=a}^{x=b}$ לאותו הדבר.

בסימנים הנ"ל, אפשר לכתוב את המשפט היסודי של חשבון אינפיניטסימלי בצורה:

$$\boxed{f \text{ רציפה ב- } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b} \quad ⊛$$

הוכחה נניח ש- G פונקציה קדומה של f

נגדיר F ע"י $F(x)=\int_a^x f$

משפט היסודי $\Rightarrow F'=f$

G פונק' קדומה $\Rightarrow G'=f$

$$\begin{cases} F'=f \\ G'=f \end{cases} \Rightarrow F-G=\text{קבוע} \Rightarrow [F]_a^b=[G]_a^b$$

$$F(x)=\int_a^x f \Rightarrow [F]_a^b = F(b)-F(a) = \int_a^b f - 0 \Rightarrow [G]_a^b=\int_a^b f$$

דוגמא $\int_1^2 x^2dx$: (א) נמצא פונקציה קדומה של x^2

$$\frac{d}{dx}\left(\frac13 x^3\right)=x^2 \Rightarrow \frac13 x^3\in\mathcal{A}(x^2)$$

או בסימנים: $\int x^2dx = \frac13 x^3 + \text{קבוע}$

(ב) משתמשים במשפט היסודי:

$$\int_1^2 x^2dx = \left[\frac13 x^3\right]_1^2 = \frac13\cdot 2^3-\frac13\cdot 1^3 = \frac73$$

הערה גם אפשר להשתמש ב-⊛ כאשר f רציפה חוץ ממספר סופי של נקודות $(x_1,\dots,x_n)$ כאשר במקום פונקציה קדומה G אנו בוחרים פונקציה רציפה G כך ש- $G'(x)=f(x)$ לכל $x\neq x_i$

מסקנה של משפט היסודי כאשר f לא רציפה

משפט
* f רציפה ב- $[a,b]$ חוץ ממספר סופי של נקודות $x_1,\dots,x_n$ ושם קיימות $\lim_{x\to x_i\pm} f$
* G פונקציה רציפה על $[a,b]$
* $G'=f$ על $[a,b]\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f = [G]_a^b$$

הוכחה נניח ש- $x_1<\dots<x_n$. נגדיר $x_0=a$, $x_{n+1}=b$.

נניח ש-$i\in\{0,1,\dots,n\}$.

על קטע $[x_i,x_{i+1}]$, נגדיר פונקציה f_i ע"י

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x) & x_i<x<x_{i+1}\\ \lim\limits_{x\to x_i+} f & x=x_i\\ \lim\limits_{x\to x_{i+1}-} f & x=x_{i+1}\end{cases} \Rightarrow f_i \text{ רציפה } \Rightarrow f_i \text{ אינטגרבילית}$$

וגם $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i = \left[\int f_i\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \overset{\text{משפט היסודי}}{=} [G]_{x_i}^{x_{i+1}}$

כי $G'=f_i$ ב- (x_i,x_{i+1})

וגם $\int f_i$, G רציפות ב- $[x_i,x_{i+1}]$

ההפרש קבוע בפנים $\Leftarrow$ גם הפרש קבוע
(ב- $[x_i,x_{i+1}]$)

$f_i=f$ על (x_i,x_{i+1}) $\Rightarrow$ $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i$

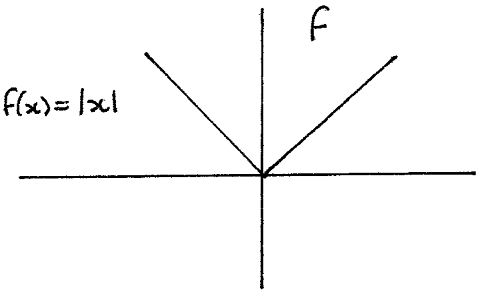
$$\Rightarrow \int_a^b f = \sum_{i=0}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\right) = \sum_{i=0}^{n} [G]_{x_i}^{x_{i+1}} = [G]_a^b$$

סכום טלסקופי
$$\sum_{i=0}^{n} G(x_{i+1})-G(x_i) = G(\underset{b}{x_{n+1}})-G(\underset{a}{x_0})$$

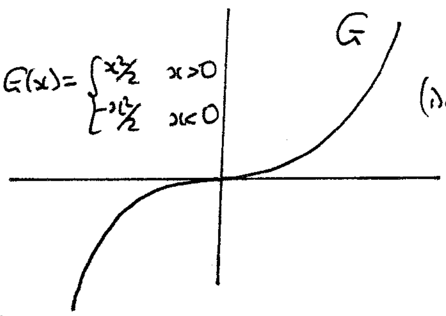
דוגמאות

(א) (f רציפה)

$f(x)=|x|$



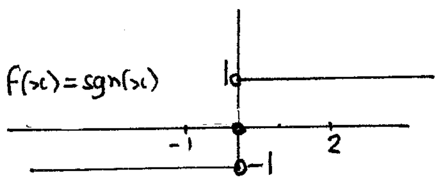
$G(x)=\begin{cases} x^2/2 & x>0\\ -x^2/2 & x<0\end{cases}$



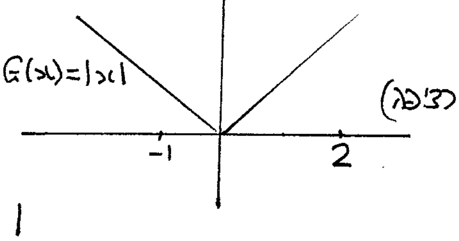
$$\int_{-1}^{1} f = G(1)-G(-1) = 1$$

(ב) (f לא רציפה)

$f(x)=\mathrm{sgn}(x)$



$G(x)=|x|$



$$\int_{-1}^{2} f = [G]_{-1}^{2} = 1$$

דוגמאות

(א) דוגמה של פונקציה גזירה כך שהנגזרת לא אינטגרבילית לפי רימן

$f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ על $[-1,1]$

$x=0$: גזירה $\quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$

$x\neq 0$: $\quad f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ לא חסומה $\Leftarrow$ לא אינטגרבילית!

(ב) שתי פונקציות אינטגרביליות כך שההרכבה לא אינטגרבילית

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0<x\leq 1 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g : [0,1] \to [0,1]$$

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

לא אינטגרבילית

שיטות אינטגרציה: לפי חלקים ולפי הצבה

אינטגרציה לפי חלקים (INTEGRATION BY PARTS)

INDEFINITE INTEGRALS — אינטגרלים לא מסוימים

u,v פונקציות גזירות

$\Leftarrow \quad \frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$

$\Leftarrow$ הגדרה של $\int$ כפונקציה קדומה

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v}$$

המשמעות: $uv-$(פונק' קדומה של uv') היא תהיה פונק' קדומה של $u'v$

ז"א אם יש לנו $\int f\cdot g$, אז אפשר כפל של פונקציות

להכליל אותו ל: $f\int g - \int(f'\cdot\int g)$

כאשר שתי $\int g$ הן אותה פונקציה קדומה של g

DEFINITE INTEGRALS — אינטגרלים מסוימים

$\xLeftarrow[\text{היסודי}]{\text{Gen}}$

$$\boxed{\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v}$$

כאשר u,v פונקציות גזירות ברציפות על $[a,b]$

continuously differentiable

הערה: "גזירה ברציפות"

$\Updownarrow$

גזירה וגם הנגזרת רציפה

(כי אם u',v' רציפות $\Leftarrow$ $u'v, uv'$ רציפות)

אינטגרציה לפי הצבה (INTEGRATION BY THE METHOD OF SUBSTITUTION)

INDEFINITE INTEGRALS — אינטגרלים לא מסוימים

כלל השרשרת (F,ϕ גזירות)

$$\frac{d}{dt}(F(\phi(t))) = F'(\phi(t))\cdot\phi'(t)$$

$$\Leftarrow \boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt \quad \text{כאשר } x=\phi(t)}$$

בסימנים:

$f(x) \longrightarrow f(\phi(t))$

$dx \longrightarrow \phi'(t)\,dt$

DEFINITE INTEGRALS — אינטגרלים מסוימים

$\xLeftarrow[\text{היסודי}]{\text{Gen}}$

* f רציפה על $[a,b]$
* ϕ גזירה ברציפות על $[\alpha,\beta]$
* $\phi: [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$

$$\Leftarrow \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

<u>הוכחה</u> f רציפה $\xLeftarrow[\text{היסודי}]{\text{Gen}}$ $G'=f$ כאשר $G(x)=\int_a^x f$

$G: [a,b] \to \mathbb{R}$

G,ϕ גזירות ברציפות $G:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ $\xLeftarrow{\text{כלל השרשרת}}$ $G\circ\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות

$$\frac{d}{dt}(G(\phi(t))) = G'(\phi(t))\cdot\phi'(t) = f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$$

$\Downarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt \overset{\text{Gen}}{\underset{\text{היסודי}}{=}} [G(\phi(t))]_\alpha^\beta = G(\phi(\beta)) - G(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx$$

$\square$

דוגמאות

א) $\boxed{\int \ln x\, dx}$

$$\int \underbrace{\ln x}_{(\ln x)\cdot 1}\, dx \underset{\text{חלקים}}{\overset{\text{לפי}}{=}} \ln x \cdot \int 1 dx - \int \frac{1}{x}\cdot\left(\int 1\, dx\right) dx$$

אותו פונקציה

$$= (\ln x)\, x - \int \frac{1}{x}\cdot x\, dx$$

$$= (\ln x)\, x - x + \text{קבוע}$$

ב) $\boxed{\int x^n \ln x\, dx}$

$$\int x^n \cdot \ln x\, dx \underset{\text{חלקים}}{\overset{\text{לפי}}{=}} (\ln x)\cdot\int x^n dx - \int \frac{1}{x}\left(\int x^n dx\right) dx$$

$$= (\ln x)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) dx$$

$$= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \text{קבוע}$$

ג) $\boxed{n\in\mathbb{N},\ \int x^n e^x dx}$

$$I_n = \int x^n e^x dx \underset{\text{חלקים}}{\overset{\text{לפי}}{=}} x^n \int e^x dx - \int n x^{n-1}\left(\int e^x dx\right) dx$$

$$= x^n e^x - n I_{n-1}$$

$$\overset{\times\frac{(-1)^n}{n!}}{\Rightarrow}\quad (-1)^n \frac{I_n}{n!} = (-1)^n\frac{x^n}{n!} e^x + (-1)^{n-1}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

נסמן את $\frac{(-1)^n}{n!} I_n$ ב- J_n. לכן:

$$J_n = \frac{(-x)^n}{n!} e^x + J_{n-1}$$

$$= \frac{(-x)^n}{n!}e^x + \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x + \dots + \frac{(-x)}{1!} e^x + J_0$$

$$J_0 = I_0 = \int e^x dx = e^x$$

$$\overset{\times(-1)^n n!}{\Rightarrow}\quad \boxed{I_n = \left(x^n - n\cdot x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + (-1)^n n!\right) e^x + \text{קבוע}}$$

ד) $\boxed{n\in\mathbb{N},\ \int (\ln x)^n dx}$

$$\int (\ln x)^n dx \underset{\begin{pmatrix} x=e^t \\ dx = e^t dt\end{pmatrix}}{\overset{\text{לפי הצבה}}{=}} \int t^n e^t\, dt$$

$$\overset{\text{ג}}{=} (t^n - n\cdot t^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + \dots + (-1)^n n!)\, e^t + \text{קבוע}$$

$$\overset{(t=\ln x)}{=} \left((\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} + \dots + (-1)^n n!\right) x + \text{קבוע}$$

ה) $\boxed{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx \overset{(n\ge 2)}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} \underbrace{(1-\cos^2 x)}_{=\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\pi/2} \underset{u}{(\cos x)}\underset{v'}{((\sin x)^{n-2}\cos x)}\, dx$$

$$\underset{\text{חלקים}}{\overset{\text{לפי}}{=}} \quad I_{n-2} - \left[\underset{u}{\cos x}\ \underset{v}{\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}} - \int \underset{u'}{(-\sin x)}\ \underset{v}{\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}}\, dx\right]_0^{\pi/2}$$

$$= I_{n-2} - \left[\cos x\ \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^n}{n-1} dx$$

$$= I_{n-2} - \frac{I_n}{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n-1}\right) I_n = I_{n-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\quad n\ge 2}$$

ה) המשך...

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2n(2n-2)\cdots2}\cdot\frac{\pi}{2}\quad\Leftarrow\quad I_0=\int_0^{\pi/2}1\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1\cdot(2n)(2n-2)\cdots2}{2n(2n-2)\cdots2\cdot(2n)(2n-2)\cdots2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{[2^n\cdot n(n-1)\cdots1]^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\cdot(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1=\frac{2n(2n-2)\cdots2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3}\,\frac{(2n)(2n-2)\cdots2}{(2n)(2n-2)\cdots2}\quad\Leftarrow\quad I_1=\int_0^{\pi/2}(\sin x)\,dx=1$$

$$=\frac{[2^n\,n(n-1)\cdots1]^2}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ו) פונקציה רציונלית של $\sin\theta,\cos\theta$ כללית (RATIONAL TRIGNOMETRIC FUNCTION)

פונקציה רציונלית = $\frac{p}{q}$ כאשר p,q פולינומים

$$\frac{p(\sin\theta,\cos\theta)}{q(\sin\theta,\cos\theta)}=R(\sin\theta,\cos\theta)$$

הצבה $t=\tan\theta/2$

$$\frac{2t}{1+t^2}=\sin\theta$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\cos\theta$$

$$dt=\tfrac12\sec^2\tfrac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{1+t^2}{2}\,d\theta$$

$$\int R(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta=\underbrace{\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt}_{\text{פונקציה רציונלית של } t}$$

אז מספיק לדעת אינטגרציה של פונקציה רציונלית רגילה!

ז) $\int\frac{r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ כאשר r פונקציה רציונלית

לפי הצבה: $t=\sin\theta$, $dt=\cos\theta\,d\theta$

$$\int\frac{r(t)}{\sqrt{(1-t^2)}}\,dt=\int\frac{r(\sin\theta)}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\underbrace{\int r(\sin\theta)\,d\theta}_{\text{סוג ו'}}$$

- אם פשוט, אפשר לעשות ישר
- אם לא, עוד הצבה ככתוב ב(1) $\int r\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du:\ u=\tan\theta/2$

דוגמא

$$\int\sin^2\theta\,d\theta\underset{t=\sin\theta}{=}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$\int\tfrac12(1-\cos2\theta)\,d\theta=$$

$$\frac{\theta}{2}-\frac14\sin2\theta=$$

$$\frac{\theta}{2}-\frac12\sin\theta\cos\theta=$$

$$\boxed{\tfrac12\sin^{-1}t-\tfrac12\,t\sqrt{(1-t^2)}}=$$

הערה: כמו לא כדאי לעשות עוד הצבה $u=\tan\frac{\theta}{2}$: $\int\sin^2\theta\,d\theta=\int\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du=\int\frac{8u^2}{(1+u^2)^3}du$

גם ההרכבה של ההצבות מסובכת.. $t=\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}\Rightarrow u=\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}$ אינטגרל מסובכת!