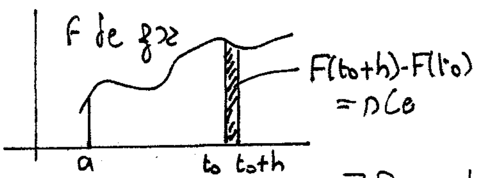
המשפט היסודי של חשבון אינפיניטסימלי

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

$$\left.\begin{array}{r} F \text{ גזירה ב- } t_0 \\ F'(t_0)=f(t_0) \end{array}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{array}{r} f\in\mathcal{R}[a,b] \;* \\ t_0\in[a,b] \;* \\ f \text{ רציפה ב- } t_0 \;* \\ F(x)\equiv\int_a^x f \;* \end{array}\right.$$

הוכחה



נניח ש- $\varepsilon>0$.

f רציפה ב- t_0 $\Leftarrow$ $\exists\delta: \ |t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$

נניח ש- $0<h<\delta$

$$F(t_0+h)-F(t_0)=\int_a^{t_0+h} f-\int_a^{t_0} f \underset{\uparrow}{=} \int_{t_0}^{t_0+h} f$$

אדיטיביות של $\int$

אבל בין t_0 ובין t_0+h, $f(t_0)-\varepsilon<f(t)<f(t_0)+\varepsilon$

$$h(f(t_0)-\varepsilon)\le\int_{t_0}^{t_0+h} f\le h(f(t_0)+\varepsilon) \quad \Leftarrow$$

פונקציה מדרגה
מעל f היא
פונקציה קבועה,
$f(t_0)+\varepsilon$

$$f(t_0)-\varepsilon\le\frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f}{h}\le f(t_0)+\varepsilon \quad \Leftarrow$$

$$f(t_0)-\varepsilon\le\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}\le f(t_0)+\varepsilon \quad \Leftarrow$$

$$|h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}-f(t_0)\right|\le\varepsilon \quad \Leftarrow$$

אותו דבר
כאשר $-\delta<h<0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}=f(t_0) \quad \Leftarrow$$

$\square$

לכן F היא פונקציה קדומה של f.