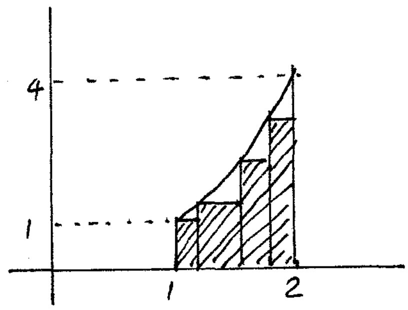
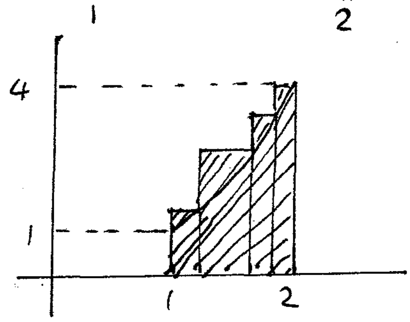
דוגמה $\boxed{\int_1^2 x^2\,dx}$

נניח ש- $f(x)=x^2$ ואנחנו רוצים להשתמש בהגדרות שלנו למצוא את $\int_1^2 f$.

נניח ש- $T=(\underset{1}{x_0}<x_1<\dots<\underset{2}{x_n})$ חלוקה של $[1,2]$.





$$\underline{S}_T(f)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\underbrace{x_{i-1}^2}_{\inf_{(x_{i-1},x_i)} f}$$

$$\overline{S}_T(f)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\underbrace{x_i^2}_{\sup_{(x_{i-1},x_i)} f}$$

לחלוקה $T_n=(1<1+\frac{1}{n}<1+\frac{2}{n}<\dots<1+\frac{n-1}{n}<2)$ $\quad(x_i=1+\frac{i}{n},\ 0\le i\le n)$

$$\begin{aligned}\underline{S}_{T_n}(f)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n+i-1)^2\\&=\frac{1}{n^3}\left(n^2+(n+1)^2+\dots(2n-1)^2\right)\\&=\frac{1}{n^3}\left(S(2n-1)-S(n-1)\right)\\&=\frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{6}(2n-1)(2n)(4n-1)\\&\qquad-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\Big]\\&=\frac{1}{6n^2}(2n-1)\left[2(4n-1)-(n-1)\right]\\&=\frac{1}{6n^2}(2n-1)(7n-1)\end{aligned}$$

$$S(n)=\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_{T_n}(f)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n+i)^2\\&=\frac{1}{n^3}\left((n+1)^2+\dots+(2n)^2\right)\\&=\frac{1}{n^3}\left(S(2n)-S(n)\right)\\&=\frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1)\\&\qquad-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\Big]\\&=\frac{1}{6n^2}(2n+1)\left[2(4n+1)-(n+1)\right]\\&=\frac{1}{6n^2}(2n+1)(7n+1)\end{aligned}$$

$$\underline{S}_{T_n}(f)\le\underline{\int_1^2} f\le\overline{\int_1^2} f\le\overline{S}_{T_n}(f)$$

$$\underline{S}_{T_n}(f)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 7\qquad\qquad \overline{S}_{T_n}(f)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 7$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\int_1^2} f=\overline{\int_1^2} f=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}=\Big[\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{\text{פונקציה קדומה}}\Big]_1^2$$

יודעים ש- f אינטגרבילית כי היא רציפה.

שני שאלות: ① איך למצוא אינטגרל בלי מידע על ההתנהגות של $\inf f$, $\sup f$?

② מה הקשר בין אינטגרל מסוים ובין פונקציה קדומה?

אינטגרביליות לפי סכומי Darboux (הגדרה שלנו)

$$\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\left(\inf_{(x_{i-1},x_i)} f\right) \qquad \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\left(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f\right)$$

$$\underline{S}_T(f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{S}_T(f)$$

$\sup_T$, $\inf_T$

f אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

$\Leftrightarrow$ $0=\inf_T\left(\overline{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)\right)$

אינטגרביליות לפי סכומי Riemann

$T \equiv (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$

סכום Riemann

$$\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) \qquad t_i \in (x_{i-1},x_i)$$

$\Delta(T)\to 0$? f אינטגרבילית

פרמטר החלוקה $\max_i(x_i-x_{i-1})$

$$\int_a^b f$$

f אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ קיים I כך ש- $\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) \to I$ כאשר $\Delta(T)\to 0$

משפט (שקילות של ההגדרות של אינטגרביליות לפי סכומי Darboux ולפי סכומי Riemann)

נניח ש- f פונקציה $[a,b]\to\mathbb{R}$. אזי

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) \xrightarrow[\Delta(T)\to 0]{} I}$$ אם"ם $\left(f\in\mathcal{R}[a,b] \text{ וגם } I=\int_a^b f\right)$

כלומר:

$$\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T:\Delta(T)<\delta\ \forall t_i\in(x_{i-1},x_i)\quad \left|\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) - I\right| < \varepsilon\right)$$

הוכחה ($\Leftarrow$)

נניח ש- $\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) \xrightarrow[\Delta(T)\to 0]{} I \\ \varepsilon>0\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ $\exists\delta>0\ \forall T:\Delta(T)<\delta\ \forall t_i\in(x_{i-1},x_i)$ $\left|\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) - I\right| < \varepsilon$

נבחר חלוקה T כך ש- $\Delta(T)<\delta$ $\Leftarrow$ $\forall t_i\in(x_{i-1},x_i),\quad \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i) \in (I-\varepsilon, I+\varepsilon)$

$$\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1},x_i)} f = \sup_{t_i}\left(\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i)\right) \in [I-\varepsilon, I+\varepsilon] \\ \inf_{t_i}\left(\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) f(t_i)\right) \in [I-\varepsilon, I+\varepsilon] \end{array}\right.$$

$$\underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\left(\inf_{(x_{i-1},x_i)} f\right)$$

$$\Leftarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\int_a^b} f \le \underline{S}_T(f) \le I+\varepsilon \\ \underline{\int_a^b} f \ge \overline{S}_T(f) \ge I-\varepsilon \end{array}\right\}$$

$\inf_T$, $\sup_T$

$$\Leftarrow I-\varepsilon \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le I+\varepsilon,\quad \forall\varepsilon>0$$

$$\Leftarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$$

$\square$

תכונות של sup ו- inf

$\sup(k\cdot A) = k\sup A,\ k>0$

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$\sup(k\cdot A) = k\inf A,\ k>0$

$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

כאשר A,B תת-קבוצות של $\mathbb{R}$

$k\cdot A \equiv \{ka \mid a\in A\}$

$A+B \equiv \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$