קבוצות של פונקציות מסויימות

$\mathcal{B}[a,b]$	bounded :	פונקציות חסומות
$\mathcal{C}[a,b]$	continuous :	פונקציות רציפות
$\mathcal{R}[a,b]$	Riemann integrable :	פונקציות אינטגרביליות
$\mathcal{S}[a,b]$	step functions :	פונקציות מדרגות
$\mathcal{M}[a,b]$	monotonic :	פונקציות מונוטוניות

תכונות של פונקציות אינטגרביליות

① $\mathcal{C}[a,b]\subseteq\mathcal{R}[a,b]$

הוכחה: f רציפה על $[a,b]$ ⇐ f רציפה במ"ש

$\varepsilon>0$ ⇐ $\left(\exists\delta>0:\ s,t\in[a,b],\ |s-t|<\delta \Rightarrow |f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$

$$\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\underbrace{\left(\sup_{(x_{i-1},x_i)}f-\inf_{(x_{i-1},x_i)}f\right)}_{\le \sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f}$$

$$=\max_{[x_{i-1},x_i]}f-\min_{[x_{i-1},x_i]}f<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

(רציפה f)

$\max f = f(s)$, $\min f = f(t)$, $s,t\in[x_{i-1},x_i]$

$\Rightarrow |s-t|\le|x_{i-1},x_i|<\delta$

$\left(\Delta(T)<\delta,\ \Delta(T)\equiv\max_i(x_i-x_{i-1})\right)\Rightarrow$

$$\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)<\frac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})}_{x_n-x_0=b-a}=\varepsilon$$

לכל כאשר $\Delta(T)<\delta$,

$$\inf_T\left(\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)\right)=0\Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b]$$

□

② $\mathcal{M}[a,b]\subseteq\mathcal{R}[a,b]$

הוכחה: נניח ש- f פונקציה מונוטונית עולה $(s<t\Rightarrow f(s)\le f(t))$

$$\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\underbrace{\left(\sup_{(x_{i-1},x_i)}f-\inf_{(x_{i-1},x_i)}f\right)}_{\le \sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\ =\ f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\le\Delta(T)\equiv\max(x_i-x_{i-1})}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$$

$$\le\Delta(T)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$$

$$=\Delta(T)\cdot\left(f(b)-f(a)\right)<\varepsilon$$

כאשר $\Delta(T)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

$$\Rightarrow\inf_T\left(\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)\right)=0\Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b]$$

□