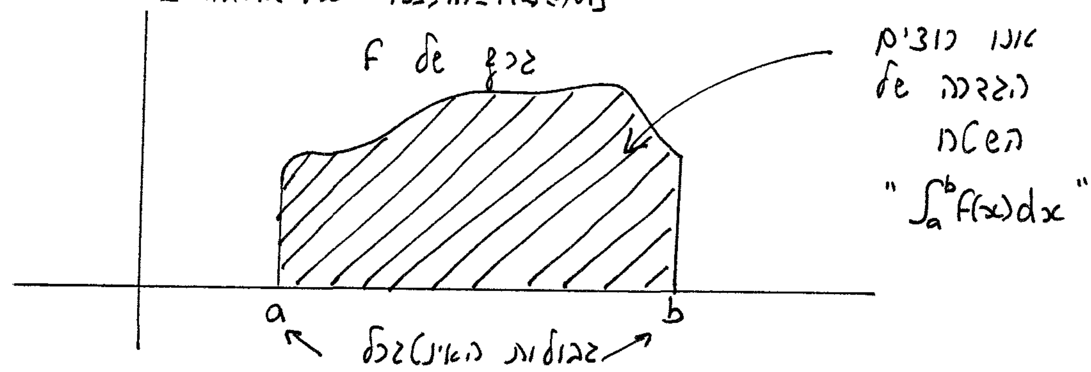
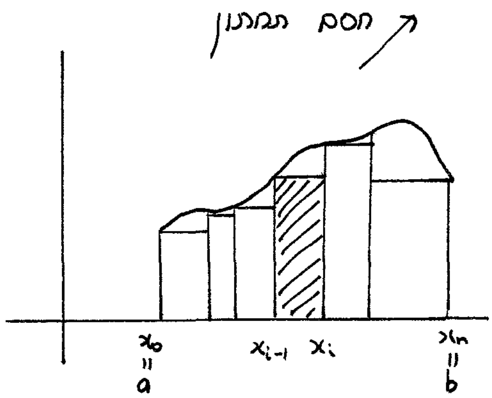
האינטגרל המסוים (לפי רימן)

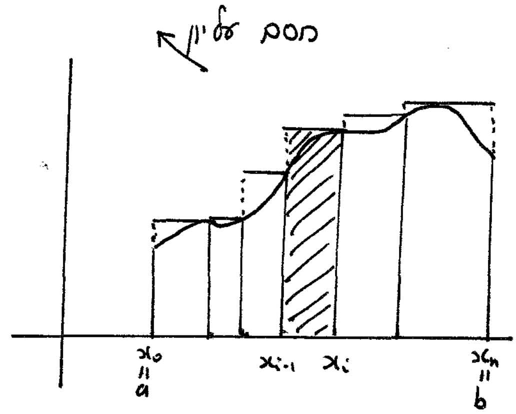
THE DEFINITE INTEGRAL

נניח ש- f פונקציה חסומה

$$f\in\mathcal{B}[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} : \sup_{[a,b]} f,\ \inf_{[a,b]} f \text{ קיימים}\}$$
$$=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} : \exists m,M\in\mathbb{R}\ \forall x\in[a,b],\ m\le f(x)\le M\}$$







$$\underline{S}_T(f)\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(\inf_{(x_{i-1},x_i)} f\right)(x_i-x_{i-1})$$

נקרא <u>סכום תחתון</u> של החלוקה T
lower sum

$$\overline{S}_T(f)\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f\right)(x_i-x_{i-1})$$

נקרא <u>סכום עליון</u> של החלוקה T
upper sum

$T=(x_0<x_1<\cdots<x_n)$, $x_0=a$, $x_n=b$	<u>חלוקה</u> partition
$\Delta(T)\equiv\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$	פרמטר החלוקה

$\sup_T$ ↓ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\inf_T$ ↓

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \overset{?}{=\!=} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

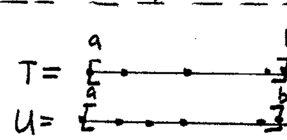
האינטגרל התחתון $\qquad$ האינטגרל העליון

אם יש שוויון
אומרים ש- f אינטגרבילית (לפי רימן)

<u>הגדרה</u> T,U חלוקות של $[a,b]$. אומרים ש- U <u>עדינה</u> מ- T אם״ם $T\subseteq U$ כקבוצות של נקודות
finer
צריך להוסיף נקודות

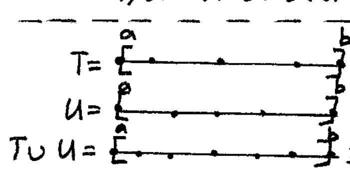
<u>הערה</u> לכל שתי חלוקות T,U, קיימת חלוקה W, עדינה משותפת מ- T,U

<u>דוגמאות</u> (א)



$T\subseteq U$

(ב)



$\supseteq T,U$

12

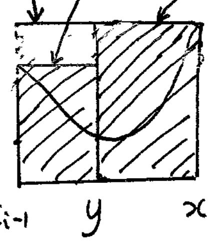
תכונות $T \supseteq U \Rightarrow \bar{S}_U(f) \ge \bar{S}_T(f),\ \underline{S}_U(f) \le \underline{S}_T(f)$

הוכחה ($\bar{S}$) מספיק להוכח במקרה שמקבלים T מ-U ע"י להוסיף נקודה אחד:

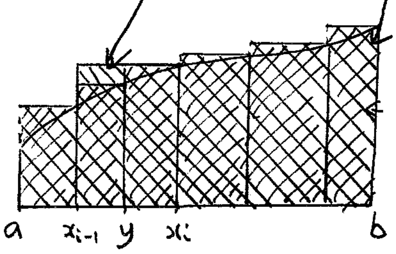
$$U = (\overset{a}{\overset{\|}{x_0}} < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < \overset{b}{\overset{\|}{x_n}})$$

$$T = (x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < y < x_i < \dots < x_n)$$

$$\sup_{(x_{i-1},x_i)} f \ge \sup_{(x_{i-1},y)} f,\ \sup_{(y,x_i)} f \Rightarrow (x_i - x_{i-1})\Big(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f\Big) \ge (y - x_{i-1})\Big(\sup_{(x_{i-1},y)} f\Big) + (x_i - y)\Big(\sup_{(y,x_i)} f\Big)$$

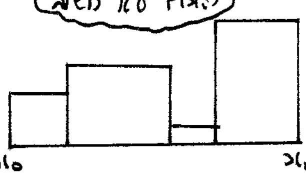


$$\Rightarrow \bar{S}_U(f) \ge \bar{S}_T(f)$$



גישה אחרת

הגדרה פונקצית מדרגות על קטע $[a,b]$ היא פונקציה f כך שקיימת חלוקה $T = (\overset{a}{\overset{\|}{x_0}} < x_1 < \dots < \overset{b}{\overset{\|}{x_n}})$ כך ש- $f|_{(x_{i-1},x_i)}$ פונקציה קבועה, לכל i ($1 \le i \le n$)



$S[a,b] = \{$פונקציות מדרגות על הקטע $[a,b]\}$

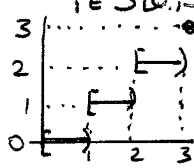
$S_T[a,b] = \{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \mid \forall_{1 \le i \le n}$ $f|_{(x_{i-1},x_i)}$ פונקציה קבועה$\}$

דוגמאות

(א) פונקציה קבועה היא פונקצית מדרגות: $2 \in S[a,b]$

(ב) $f(x) = [x]$

$f \in S[0,3]$



$f \in S_T[0,3]$

$T = (0 < 1 < 2 < 3)$

(ג) $S[a,b] = \bigcup_{\text{חלוקות } T} S_T[a,b]$

אבל האיחוד לא של קבוצות זרות.

$S_T[a,b] \subset S_U[a,b] \Leftarrow U \supseteq T$

תכונות $f,g \in S[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $c \cdot f,\ f+g,\ f \cdot g \in S[a,b]$

פונקציה $cf(x)$; פונקציה $f(x)+g(x)$; פונקציה $f(x) \cdot g(x)$

הגדרה נגדיר העתקה $I_{[a,b]}: S[a,b] \to \mathbb{R}$ ע"י

$$I_{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

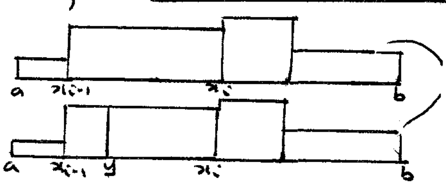
c_i – הערך של f על (x_{i-1},x_i)

Darboux sum

$I_{[a,b]}$ מוגדרת היטב: צריך לבדוק ש- $I_{[a,b]}(f)$ לא תלוי בחלוקה. מספיק להוסיף נקודה אחד:

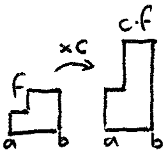
$x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n$ $\qquad c_i(x_i - x_{i-1})$

$x_0 < \dots < x_{i-1} < y < x_i < \dots < x_n$ $\qquad \overset{\|}{c_i(y - x_{i-1}) + c_i(x_i - y)}$



אותו שטח

13



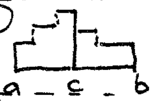
$f,g\in S[a,b]$

תכונות ① ליניאריות : linearity $\quad I_{[a,b]}(f+g)=I_{[a,b]}(f)+I_{[a,b]}(g)$

$I_{[a,b]}(cf)=c\cdot I_{[a,b]}(f)$

---

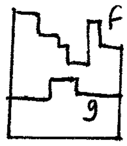
② אדיטיביות additivity $\quad I_{[a,b]}(f)=I_{[a,c]}(f)+I_{[c,b]}(f) \quad (a<c<b)$



---

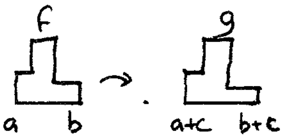
③ חיוביות positivity : $\underbrace{f\geq 0}_{f(x)\geq 0\ \forall x} \Rightarrow I_{[a,b]}(f)\geq 0$

מונוטוניות : $\underbrace{f\geq g}_{f(x)\geq g(x)\ \forall x\in[a,b]} \Rightarrow I_{[a,b]}(f)\geq I_{[a,b]}(g)$ (monotonicity)



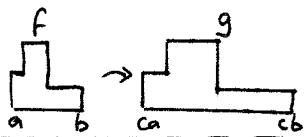
---

④ (הזזה) $\left\{\begin{array}{l} f\in S[a,b] \\ g(x)\equiv f(x-c)\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} g\in S, \\ I_{[a+c,b+c]}(g)=I_{[a,b]}(f)\end{array}$



---

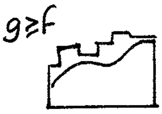
⑤ $\left\{\begin{array}{l} f\in S[a,b] \\ g(x)\equiv f(x/c) \\ (c>0)\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} g\in S[ca,cb] \\ I_{[ca,cb]}(g)=c\,I_{[a,b]}(f)\end{array}$



---

⑥ $I_{[a,b]}(1)=(b-a)$

הגדרה $f\in B[a,b] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{\int_a^b} f\equiv \inf\limits_{\substack{g\in S[a,b]\\ g\geq f}} I_{[a,b]}(g) \\ \underline{\int_a^b} f\equiv \sup\limits_{\substack{g\in S[a,b]\\ g\leq f}} I_{[a,b]}(g)\end{array}\right.$



מוגדרות היטב : $(\overline{\int_a^b})$ $\quad f\in B[a,b] \Rightarrow \exists m,M\in\mathbb{R}\ \forall x\in[a,b]\ \ m\leq f(x)\leq M \rightarrow M\in\{g\in S[a,b]:g\geq f\}$ פונקציה קבועה

לא ריקה

אם $g\in S[a,b]$, $g\geq f$

$\Rightarrow g\geq m$

$\Rightarrow I_{[a,b]}(g)\geq I_{[a,b]}(m)=m(b-a)$

הקבוצה $\{I_{[a,b]}(g): g\in S[a,b],\ g\geq f\}$ לא ריקה

עם חסם תחתון ולכן קיים inf $\square$

משפט $\boxed{\underline{\int_a^b} f=\sup\limits_T \underline{S}_T(f)\ ,\ \ \overline{\int_a^b} f=\inf\limits_T \overline{S}_T(f)}$

הוכחה $(\overline{\int_a^b})$

$$\overline{\int_a^b} f=\inf_{\substack{g\in S[a,b]\\ g\geq f}} I_{[a,b]}(g) \underset{S[a,b]=\bigcup_T S_T[a,b]}{=} \inf_T\Big(\inf_{\substack{g\in S_T[a,b]\\ g\geq f}} I_{[a,b]}(g)\Big)=\inf_T \overline{S}_T(f)$$

$$=\inf\Big\{\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})c_i \;\Big|\; \underbrace{g|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i,\ g\geq f}_{\text{תנאי: } c_i\geq f(x)\ \forall x_{i-1}<x<x_i}\Big\}=\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\sup_{(x_{i-1},x_i)} f=\overline{S}_T(f)$$

$\square$