ד'

$f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

$f'(x) = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$

$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n \geq 1)$, $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ טור Taylor של f בסביבת $x=0$ הינו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

השארית בצורת Cauchy $\Downarrow$

$$\exists \theta \in (0,1) : \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n (1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|} \cdot \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n < \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כאשר $|x|<1$

$0<\theta<1,\ |x|<1$

$\Rightarrow \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$

$|1+\theta x| > (1-|x|)$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}}$$

כאשר $|x| < 1$

ה'

$f(x) = (1+x)^{\alpha} \ (\alpha \notin \mathbb{N})$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

$\Rightarrow$ טור Taylor של f בסביבת $x=0$ הינו

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

השארית בצורת Cauchy $\Downarrow$

$$\exists \theta \in (0,1) : \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n}_{<1} |x^{n+1}| \cdot |\underbrace{1+\theta x}_{(1-|x|,\ 2)}|^{\alpha} \begin{cases} < 2^{\alpha}|y_n| & (\alpha>0) \\ < (1-|x|)^{\alpha}|y_n| & (\alpha<0) \end{cases}$$

כי $0<\theta<1$, $|x|<1$

כאשר $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} = y_n$

$$R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftarrow y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftarrow \left|\frac{y_n}{y_{n-1}}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n}x\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x| < 1$$

כאשר $|x|<1$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$$

כאשר $|x| < 1$

נוסחת הבינום

Binomial Theorem

ו'

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = \sec^2 x$

$f^{(2)}(x) = 2\sec^2 x \tan x$

$f^{(3)}(x) = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x$

$f^{(4)}(x) = 8\sec^2 x \tan^3 x + 16\sec^4 x \tan x$

$f^{(5)}(x) = 16\sec^2 x \tan^4 x + 88\sec^4 x \tan^2 x + 16\sec^6 x$

$f^{(6)}(x) = 32\sec^2 x \tan^5 x + 416\sec^4 x \tan^3 x + 272\sec^6 x \tan x$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

פולינום Taylor בסביבת $x = x_0 = 0$

$$P_5^f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

$\frac{1}{1!}$, $\frac{2}{3!}$, $\frac{16}{5!}$

נוסחת Taylor, $x=0.1$

(השארית בצורת Lagrange) $\exists c \in (0,x)$:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6$$

$\Downarrow$

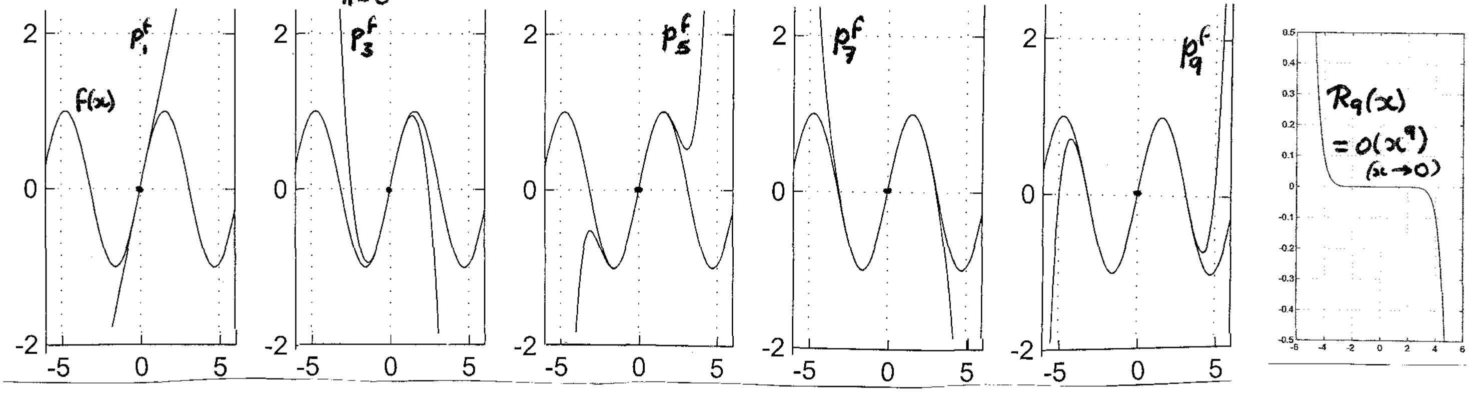
$$\tan(0.1) = 0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00002}{15}$$

השארית $+ \Leftarrow < 10^{-7}$

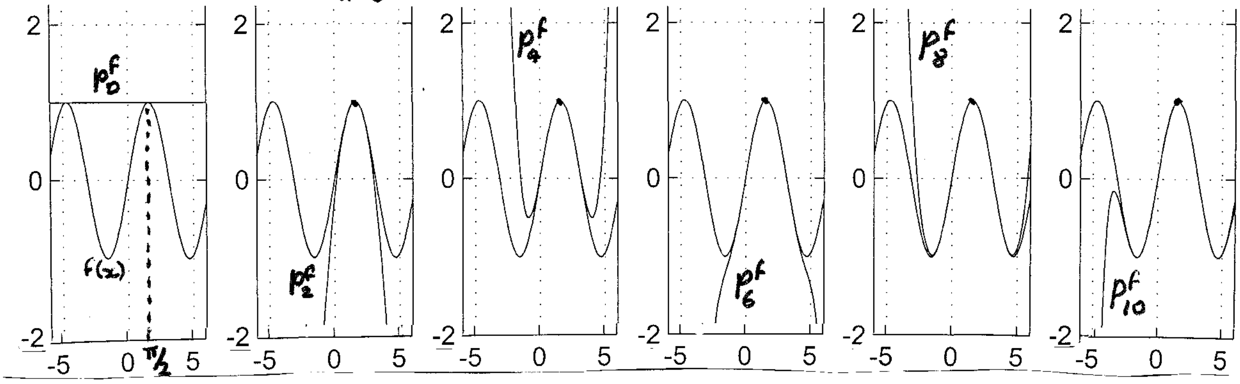
$0.100334672 \approx 0.1003346$

פולינומים Taylor של $f(x)=\sin x$

$x_0=0$: טור Taylor של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$



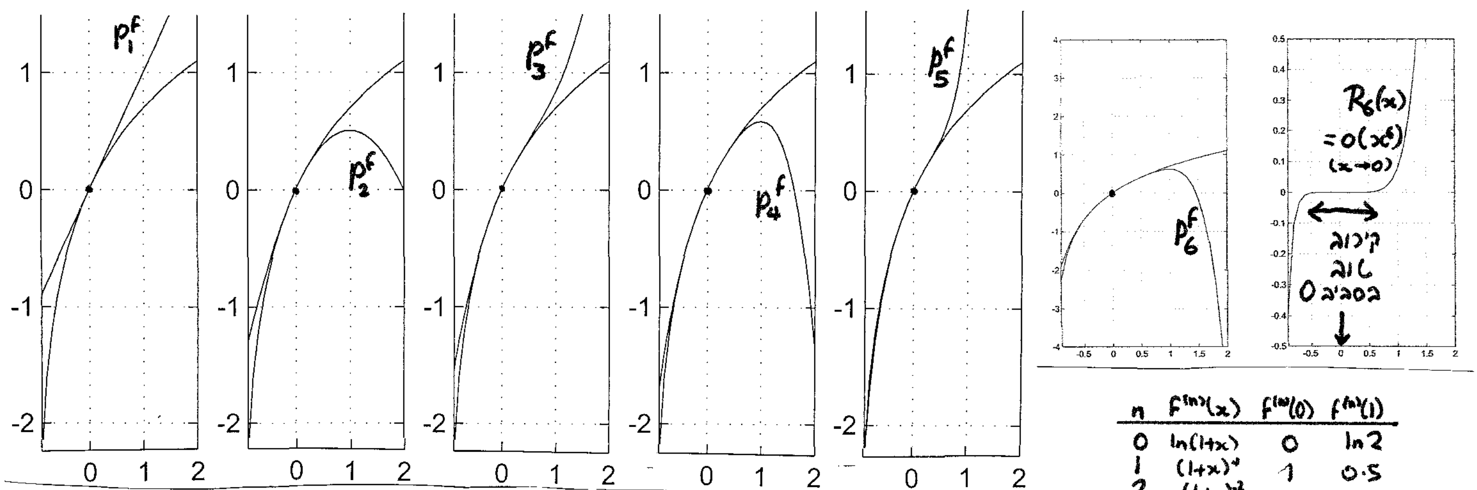
$x_0=\pi/2$: טור Taylor של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\pi/2)^{2n}$



n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(\pi/2)$
0	$\sin x$	0	1
1	$\cos x$	1	0
2	$-\sin x$	0	-1
3	$-\cos x$	-1	0
4	$\sin x$	0	1
5	$\cos x$	1	0
6	$-\sin x$	0	-1
7	$-\cos x$	-1	0
8	$\sin x$	0	1
9	$\cos x$	1	0
10	$-\sin x$	0	-1

פולינומים Taylor של $f(x)=\log_e(1+x)$

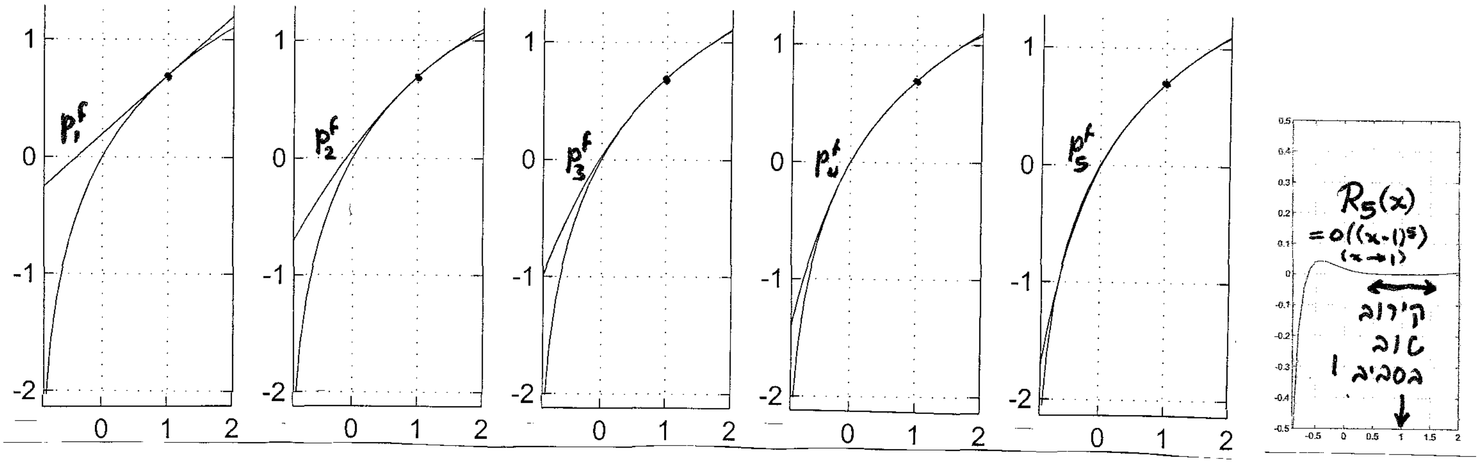
$x_0=0$: טור Taylor של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ (מתכנס כאשר $|x|<1$)

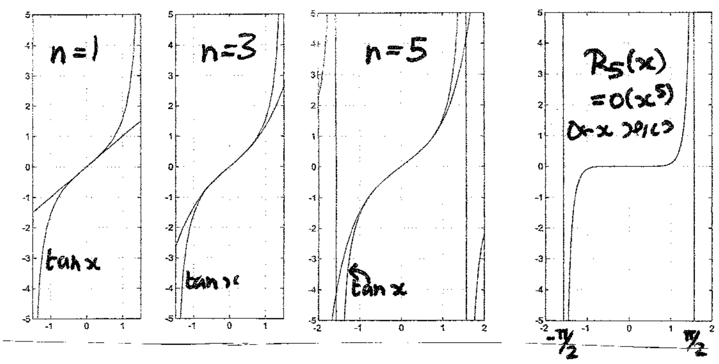


n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln(1+x)$	0	$\ln 2$
1	$(1+x)^{-1}$	1	0.5
2	$-(1+x)^{-2}$	-1	-0.25
3	$2(1+x)^{-3}$	2	0.25
4	$-6(1+x)^{-4}$	-6	-0.375
5	$24(1+x)^{-5}$	24	0.75
6	$-120(1+x)^{-6}$	-120	-1.875

$x_0=1$: טור Taylor של $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-1)^n$

(מתכנס כאשר $|x-1|<2$, כלומר $-1<x<3$)





טור Taylor של $f(x)=\tan x$ בסביבה של $x=0$ הוא

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{p_1^f(x)} + \frac{x^3}{3}}_{p_3^f(x)} + \frac{2x^5}{15}}_{p_5^f(x)} + \cdots$$

$R_1(x)$ — מ-$\frac{x^3}{3}$ והלאה; $R_3(x)$ — מ-$\frac{2x^5}{15}$ והלאה; $R_5(x)$ — אחרי $\frac{2x^5}{15}$.

הקשר בין הצורה של הגרף של f בסביבת $x=x_0$ ובין סימנים של הנגזרות $f^{(n)}(x_0)$

f גזירה n פעמים ב- $x=x_0$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\Downarrow \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

קיימת סביבה של $x=x_0$ כך שהסימן של $\frac{R_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n}$ הוא סימן של $f^{(n)}(x_0)$

מקרה א': $f'(x_0)=0$ (x_0 נקודת קיצון או פיתול)

stationary point

נניח ש- n הוא מספר הכי קטן ($n>1$) כך ש- $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

לכן: $p_{n-1}^f(x)=f(x_0)$, $\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{=R_{n-1}(x)} \approx \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

הפרש $= o((x-x_0)^n)$ (כאשר $x\to x_0$)

	n זוגי	n אי זוגי
$f^{(n)}(x_0)>0$	local minimum מינימום מקומי	point of inflexion פיתול
$f^{(n)}(x_0)<0$	local maximum מקסימום מקומי	point of inflexion פיתול

מקרה ב': $f''(x_0)=0$ (רוצים לדעת מתי x_0 הוא נקודת פיתול)

נניח ש- n הוא מספר הכי קטן ($n>2$) כך ש- $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

לכן

$$p_{n-1}^f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{קו המשיק}}=p_1^f(x)$$

$$R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

$$\Leftarrow \quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

	n זוגי	n אי זוגי
$f^{(n)}(x_0)>0$		point of inflexion פיתול
$f^{(n)}(x_0)<0$		point of inflexion פיתול

n זוגי: רק אם גם $f'(x_0)=0$ מקבלים מקרה מיוחד (מקס'/מינ' מקומי)

ההפרש בין f ובין קו המשיק כמו $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$