מסקנות:

(א) $\psi(z)=(x-z)^{n+1}$

$$\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}=\frac{0-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n}$$

$\exists c\in(x_0,x)$:

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

צורת השארית של Lagrange

Lagrange's form of remainder

(ב) $\psi(z)=(x-z)$

$$\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}=x-x_0$$

$$\exists c\in(x_0,x): R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x_0-x)$$

$c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1$

$x-c=(x-x_0)(1-\theta)$

$\exists\theta\in(0,1)$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

צורת Cauchy של השארית

Cauchy's form of remainder

(ג) בהוכחה, $\phi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$

$\phi(x_0)=R_n(x)$

$\phi(x)=0$

$$\Downarrow\quad \int_{x_0}^{x}\phi'(z)\,dz=\phi(x)-\phi(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n\,dz=R_n(x)$$

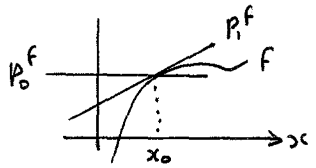
צורת אינטגרל של השארית

The integral form of the remainder

דוגמאות

① $n=0$: $P_0f(x)=f(x_0)$ פונקציה קבועה

$n=1$: $P_1f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ קירוב לינארי (קו המשיק)



---

② Lagrange $n=0$

$\Downarrow$

$$\exists c\in(x_0,x): R_0(x)=\frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)$$

$\parallel\!\!\!\mid$ $f(x)-f(x_0)$

Cauchy $n=0$

$\Downarrow$

$$\exists\theta\in(0,1): R_0(x)=\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))}{1!}\cdot(x-x_0)$$

$\parallel\!\!\!\mid$ $f(x)-f(x_0)$

צורת אינטגרל $n=0$

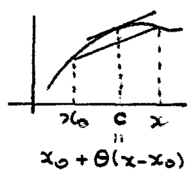
$$\int_{x_0}^{x}f'(z)\,dz=R_0(x)$$

$\parallel\!\!\!\mid$ $f(x)-f(x_0)$

משפט היסודי

אותה צורה

במשפט הערך הממוצע



---

③ * f גזירה פעמיים ברציפות בסביבת x_0

* $f''(x_0)\neq 0$

$\Leftarrow$ $f'(a)\neq f'(b)$ לכל $a\neq b$ בסביבה של x_0 $\Leftarrow$ לכל h קטן, קיימת יחידה $\theta(h)\in(0,1)$ כך ש-

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\,f'(x_0+\theta(h)h)$$

$$\text{(תרגיל)}\Downarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{2}$$

---

④ $f(x)=e^x,\ x_0=0$

$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

$$\xRightarrow{\text{Lagrange}}\ \exists c\in(0,x): R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(א) מסקנות

$|R_n(x)|<\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0\quad x>0$

$|R_n(x)|<\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0\quad x<0$

$$\Rightarrow\ \boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad\forall x}$$

$\Downarrow$

$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

$\Downarrow$

$2<e<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=3$

(ב) $\boxed{e\notin\mathbb{Q}}$

הוכחה: נניח בשלילה $e=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

$f(1)=P_n(1)+R_n(1)$

$$\times n!:\quad \underset{\mathbb{N}}{\frac{m}{n}\cdot n!}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)n!}_{\mathbb{N}}+\underset{\frac{e^c}{n+1},\ 0<c<1}{R_n(1)\cdot n!}$$

$$\Rightarrow\ 0<\frac{1}{n+1}<\underset{\mathbb{N}}{\frac{e^c}{n+1}}<\frac{e}{n+1}<1\qquad e<3,\ n+1\geq 3$$

※

(ג) נמצא את $e^{0.1}$ ל-5 ספרות.

$$R_n(0.1)=\frac{e^c}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}<\frac{e^{0.1}}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}\qquad 0<c<0.1$$

$$R_3(0.1)<\frac{e^{0.1}}{4!}(0.1)^4<\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$$

$$e^{0.1}\approx 1+0.1+\frac{(0.1)^2}{2!}+\frac{(0.1)^3}{3!}+R_3(0.1)$$

$$=1+0.1+0.005+0.0001\dot{6}$$

$\Rightarrow$ $e^{0.1}\approx 1.10517$ to 5 d.p.

⑤ $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x_0=0$

$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Leftarrow$, $f^{(n)}(x_0)=n!$, $P_n^f(x)=1+x+\dots+x^n$

$\exists \theta\in(0,1): R_n(x)=\frac{n+1}{(1-\theta x)^{n+2}}\cdot x^{n+1}(1-\theta)^n$

$\Downarrow$

$|R_n(x)| = (n+1)|x|^{n+1}\cdot\left|\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right|^n\cdot\frac{1}{(1-\theta x)^2}$

$\underset{0<\theta<1,\ |x|<1}{<} (n+1)\cdot|x|^{n+1}\cdot\frac{1}{(1-|x|)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$\Rightarrow \left|\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right|<1$, $|1-\theta x|>1-|x|$ $(-\theta<\theta x<\theta)$

הוכחנו ש- $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ כאשר $|x|<1$

$\exists c\in(0,x): R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+1}}$

Lagrange

$\Downarrow$

$1>x>0$: $|R_n(x)| \underset{1-x<1-c}{<} \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} \xrightarrow[\frac{x}{1-x}<1]{n\to\infty} 0$ $(0<x<\frac{1}{2})$

$x<0$: $|R_n(x)| \underset{1-c>1}{<} \frac{|x|^{n+1}}{1} \xrightarrow[|x|<1]{n\to\infty} 0$ $(-1<x<0)$

הוכחנו ש- $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ כאשר $-1<x<\frac{1}{2}$

הערות ① כאן השארית בצורת Cauchy יותר נוחה מהשארית בצורת Lagrange (בפרט כאשר $\frac{1}{2}<x<1$)

② קיימות דוגמאות כאשר אפשר להוכיח כי $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ בעזרת Lagrange אבל לא בעזרת Cauchy (לדוגמא, $f(x)=\ln(1+x)$, $x_0=0$, $x=1$)

③ הפונקציה f מוגדרת כאשר $x\neq 1$, אז בסביבת $x_0=0$, לא כדאי להסתכל על התכנסות של טור Taylor שלה חוץ מהקטע $(-\infty,1)$

④ הטור Taylor של f בסביבה 0 הוא $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ויודעים שהוא מתכנס כאשר $|x|<1$.
(אינפי 1)

בדרך כלל, כדאי לבדוק איפה הפונקציה מוגדרת, וגם איפה הטור Taylor שלה מתכנס, ורק בתחום כך שגם הפונקציה מוגדרת וגם הטור מתכנס, אפשר לנסות להוכיח ש- $R_n(x)\to 0$ כאשר $n\to\infty$ בעזרת Cauchy/Lagrange.
(צ"ל הטור Taylor מתכנס ל- $f(x)$)

הערה: קיימת דוגמא כך ש- f מוגדרת, טור Taylor של f מתכנס, אבל $R_n(x)\not\xrightarrow{n\to\infty}0$ (סכום טור Taylor של $\neq f(x)$)
(לדוגמא e^{-1/x^2})

הערה: קיימות דוגמאות כך ש- f מוגדרת, טור Taylor של f מתכנס, $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$, אבל אי אפשר להוכיח ש- $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ בעזרת הצורות Cauchy ו- Lagrange של השארית
(לכן קיימות עוד צורות של השארית)

$\boxed{7}$

הגדרה אם f פונקציה גזירה אין-סוף פעמים ב-x_0, אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ נקרא טור Taylor של f בסביבת x_0.

הערה סכום חלקי של טור Taylor הוא $p_n^f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r$ פולינום Taylor מעלה n

הערה טור Taylor מתכנס ל-$f(x)$ אם"ם ($R_n(x)\to 0$ כאשר $n\to\infty$)

דוגמאות

א) $f(x)=e^x$, $x_0=0$ ⟵ טור Taylor הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ומתכנס ל-e^x לכל x

(הוכחנו בעמ' 6 דרך שארית בצורת Lagrange)

$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ לכל } x}$

ב) $f(x)=\sin x$, $x_0=0$

$f'(x)=\cos x$, $f^{(2)}(x)=-\sin x$, $f^{(3)}(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$

$f'(0)=1$, $f^{(2)}(0)=0$, $f^{(3)}(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$

$(f^{(n)}(x))$ סדרה מחזורית בעלת מחזור 4

$(f^{(n)}(0))$ סדרה מחזורית

$\Leftarrow f^{(2n)}(0)=0$, $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$ $\Leftarrow$ טור Taylor בסביבת 0 הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

לכל x, $|f^{(n)}(x)|\le 1$

$\Rightarrow |R_n(x)| \underset{\text{השארית בצורת Lagrange}}{=} \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$

טור Taylor מתכנס לכל x ל-$f(x)$

$\boxed{\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ לכל } x}$

ג) $f(x)=\cos x$, $x_0=0$

$f'(x)=-\sin x$, $f^{(2)}(x)=-\cos x$, $f^{(3)}(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x=f(x)$

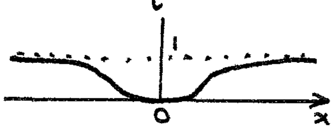
$f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f^{(2)}(0)=-1$, $f^{(3)}(0)=0$

מחזורית

$\Leftarrow f^{(2n)}(0)=(-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0)=0$ $\Leftarrow$ טור Taylor בסביבת 0 הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$\boxed{\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ לכל } x}$

ד) $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$



$\lim_{t\to\infty}t^n e^{-t}=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}e^{-1/x^2}=0$

$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$

$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=\left(\text{פולינום בדרגה מעלה } 3n \text{ ב-} 1/x\right)\cdot e^{-1/x^2}$

$\Leftarrow \lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=0$

ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=0$

נקבל $f^{(n)}(0)=0$ באינדוקציה לכל n

$\Leftarrow$ טור Taylor של f בסביבת 0 הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0}{n!}x^n$

* הטור מתכנס לכל x אבל ל-0 ולא ל-$f(x)$!