הערה לפי ההגדרה של השארית,

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n f(x)} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{שארית}}$$

$$\Big\downarrow\; x = x_0 + dx$$

$$\boxed{f(x_0+dx) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot dx + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(dx)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(dx)^n + R_n(x_0+dx)}$$

$$\underbrace{\delta f}_{\text{שינוי ב-}f} = \underbrace{df}_{\text{קירוב לינארי}} + \underbrace{\frac{1}{2!}d^2 f}_{\text{"חלק" של } \delta f \text{ בסדר 2}} + \dots + \frac{1}{n!}d^n f + \underbrace{\text{שארית}}_{O((dx)^n)}$$

כאשר
$$d^r f \equiv f^{(r)}(x_0)\cdot(dx)^r = \frac{d^r f}{dx^r}\cdot(dx)^r$$

דוגמא: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $dx = 0.1$ $\Rightarrow$ $\delta f = e^{0.1} - 1$, $d^r f = (0.1)^r$

צורות של השארית

קושי

* f מוגדרת על $[x_0, x_0+H]$
* $f', \dots, f^{(n)}$ רציפות על $[x_0, x_0+H]$
* $f^{(n+1)}$ קיימת על (x_0, x_0+H)
* $x \in (x_0, x_0+H)$
* ψ רציפה על $[x_0, x]$ (פונקציה עזרה)
* ψ גזירה על (x_0, x)
* $\psi'(z) \neq 0$ על (x_0, x)

$$\Rightarrow \exists c \in (x_0, x): R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

הערה: אותה נוסחה בצד השני של x_0 $(x<x_0)$ עובד אם $c \in (x, x_0)$

הערה: כאן, אם $x_0 < x$, כתוב $c \in (x_0, x)$ במקום "c בין x_0 לבין x"

הוכחה נגדיר פונקציה ϕ ע"י $\phi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \dots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$

ψ, ϕ רציפות על $[x_0, x]$
ϕ, ψ גזירות על (x_0, x)
$\psi' \neq 0$ על (x_0, x)

$$\xRightarrow[\text{(Cauchy)}]{\text{משפט הערך הממוצע}} \exists c \in (x_0, x): \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)}$$

$\phi(x) = 0$
$\phi(x_0) = R_n(x)$

$$\begin{aligned}\phi'(z) = &-f'(z)\\ &- f''(z)(x-z) + f'(z)\\ &- \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + f''(z)(x-z)\\ &\vdots\\ &- \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} \overset{\text{טור}}{\underset{\text{טלסקופי}}{=}} -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n\end{aligned}$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\exists c \in (x_0, x): \underbrace{R_n(x)}_{\phi(x_0)-\phi(x)} = -(\psi(x) - \psi(x_0))\frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$\square$