1

אינפי 2 תשס"ז (80132)

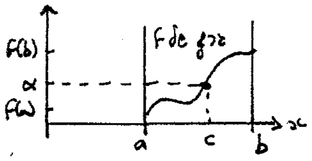
תקציר חומר של הרצאות א'

מרצה: רות לורנס-נוימרק
אתר: http://www.ma.huji.ac.il/~ruthel/courses/infib07
דואל: ruthel@ma.huji.ac.il

הרצאות: א' 10-12 (מתמטיקה 2)
ג' 10-12
ה' 11-12

שעות קבלה: יום ג' 12-1, יום ה' 9:30-10:30 בחדר 5, בניין מנצ'סטר (מתמטיקה)

תזכורת מסמסטר א'



משפט ערך הביניים של קושי (Intermediate Value Theorem)

* f רציפה על $[a,b]$
* α בין $f(a)$ ובין $f(b)$

$\Rightarrow (\exists c\in(a,b) : f(c)=\alpha)$

משפט Weierstrass פונקציה רציפה על קטע סגור מקבלת הערכים הקיצוניים.
A continuous function on a closed interval attains its bounds.

$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff$ [לכל סביבה B של b, קיימת סביבה A של a כך ש- $(x\in A \Rightarrow f(x)\in B)$]

$\lim_{x\to a+} f(x) = b$

$\lim_{x\to a-} f(x) = b$

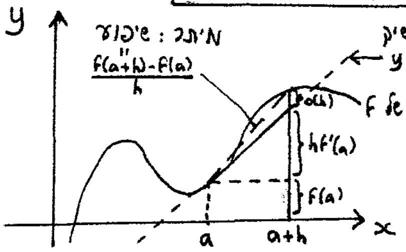
צריך להשתמש בסביבה חד צדדי של a

סביבה של a: $(a-h', a+h)$
סביבה של ∞: (M,∞)
סביבה של $-\infty$: $(-\infty, M)$
סביבה חד צדדי של a: $(a-h, a)$ או $(a,a+h)$

$$f'(a) \overset{\text{הגדרה}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

כלומר: $f(a+h)-f(a) = hf'(a)+o(h)$

$$\boxed{f(a+h) = f(a)+hf'(a)+o(h)}$$



$f(h), g(h)$ פונקציות של משתנה אחד h

אנו אומרים ש- $f(h)=o(g(h))$ אם"ם $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)} = 0$

דוגמאות

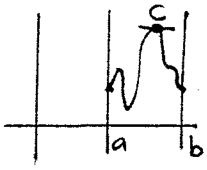
$h^2 = o(h)$
$h^{3/2} = o(h)$
$\sin h \neq o(h)$
$\sin(h^2) = o(h)$
$\sin h - h = o(h^2)$

$f(h)=o(1) \iff \lim_{h\to 0} f(h)=0$

משפט

* f גזירה על (a,b)
* בנקודה $x=c$, f מקבלת ערך מקסימום [מקומי] (או מינימום)

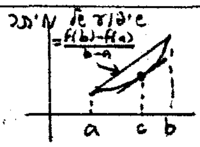
$\Rightarrow f'(c)=0$



משפט רול (Rolle's Theorem)

* f רציפה על $[a,b]$
* f גזירה על (a,b)
* $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow (\exists c\in(a,b): f'(c)=0)$



משפט הערך הממוצע (Mean Value Theorem)

① (Lagrange)

* f רציפה על $[a,b]$
* f גזירה על (a,b)

$\Rightarrow \left(\exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$

② (Cauchy)

* f,g רציפות על $[a,b]$
* f,g גזירות על (a,b)
* $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$

$\Rightarrow$

* $g(a)\neq g(b)$
* $\exists c\in(a,b): \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

③ (Darboux)

* f גזירה על $[a,b]$
* α בין $f'_+(a)$ ובין $f'_-(b)$

$\Rightarrow (\exists c\in(a,b) : f'(c)=\alpha)$

הכלל של לופיטל (L'Hôpital's rule)

מטרה: להחליף גבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ בצורה $\frac{0}{0}$ או $\frac{*}{\infty}$ ע"י $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

דוגמאות

① $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+3x+9}=\frac{6}{27}\left(=\frac{2}{9}\right)$

משפט 1 ‖

$f(x)=x^2-9 \quad f'(a)=6$

$g(x)=x^3-27 \quad g'(a)=27$

$a=3$

$6/27$

---

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{1/x}=\ ?$

$\ln(1+2\sin x)^{1/x}=\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}$

$f(x)=\ln(1+2\sin x) \quad f'(a)=2$

$g(x)=x \quad g'(a)=1$

$a=0$

משפט 1 $x\to 0$

$\frac{2}{1}=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{1/x}=e^2$

---

③ **זהירות!**

$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \quad f'(0)=0$

$g(x)=x \quad g'(0)=1$

$a=0 \quad f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0=\frac{f'(0)}{g'(0)}$

אבל $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ לא קיים

משפט 1

* f,g גזירות ב-a (f,g מוגדרות בסביבה של a)
* $f(a)=g(a)=0$
* $g'(a)\neq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

הוכחה

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\xrightarrow{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$ □

הערה: גם מתקיים כאשר הגבול חד צדדי

* $f'_+(a), g'_+(a)$ קיימות
* $f(a)=g(a)=0$
* $g'_+(a)\neq 0$

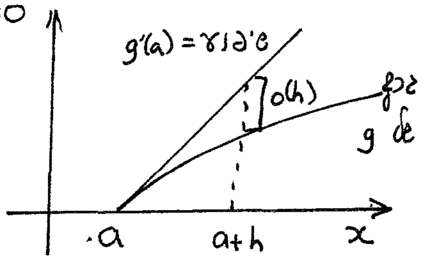
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'_+(a)}{g'_+(a)}$

אינטואיציה (לא הוכחה!)

$f(a+h)=f'(a)h+o(h)$

$g(a+h)=\underbrace{g'(a)}_{\neq 0}h+o(h)$

$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a)h+o(h)}{g'(a)h+o(h)}=\frac{f'(a)+o(1)}{g'(a)+o(1)}\xrightarrow{h\to 0}\frac{f'(a)}{g'(a)}$



משפט 2
(כלל L'Hôpital ל- $\frac{0}{0}$)

* f,g גזירות בסביבה של נקודה a (פרט אולי בנקודה a עצמה)
* $g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq a$
* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=\lim\limits_{x\to a}g(x)$
* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (סופי או אינסופי ($\pm\infty$))

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים (וגם $g(x)\neq 0$ בסביבה של a) וגם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הוכחה $0=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ $\Leftarrow$ אפשר להגדיר (או לשנות) את f,g כך ש- $f(a)=g(a)=0$; f,g רציפות ב-a

(תנאים במשפט • x בתחום גזירות של f,g) $\Leftarrow$ משפט הערך הממוצע Cauchy $\Leftarrow$ קיים c בין a ובין x כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ (וגם $g(x)\neq g(a)=0$)

$a \quad c \quad x$, A

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=M$ (סופי או $\pm\infty$) קיים $\Leftarrow$ קיימת סביבה A של a כך ש- $x\in A\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}\in X$

X סביבה של M $\Rightarrow\left(x\in A\Rightarrow c\in A\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\in X\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=M$

□

$\boxed{ב2}$

הערות

א) גם מתקיים אם בכל מקום $x\to a+$ (או $a-$) במקום $x\to a$ וסביבה חד צדדי

ב) גם מתקיים אם להחליף $a \rightsquigarrow \infty$

הוכחה נגדיר פונקציות חדשות F,G ע"י
$$\begin{cases} F(u)=f(\tfrac{1}{u}) \\ G(u)=g(\tfrac{1}{u}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(u)=-\frac{1}{u^2}f'(\tfrac{1}{u}) \\ G'(u)=-\frac{1}{u^2}g'(\tfrac{1}{u}) \end{cases} \Rightarrow \frac{F'(u)}{G'(u)}=\frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})}$$

f,g רציפות בסביבה של ∞ $\Rightarrow$ F,G רציפות בסביבה של $0+$

$g'(x)\neq 0$ $\Rightarrow$ $G'(u)\neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{u\to 0+} F(u)=0=\lim\limits_{u\to 0+} G(u)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים $\Rightarrow$ $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{F'(u)}{G'(u)}$

$\Rightarrow$ (משפט 2) $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{F(u)}{G(u)}$ קיים וגם $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{F(u)}{G(u)}=\lim\limits_{u\to 0+}\frac{F'(u)}{G'(u)}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

ג) אפשר להשתמש בכלל L'Hopital כמה פעמים

משפט 3*
* f,g רציפות n פעמים בנקודה a
* $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$
* $g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0,\ g^{(n)}(a)\neq 0$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$

הוכחה משפט 1 על פונקציות $f^{(n-1)},g^{(n-1)}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}\overset{\circledast}{=}\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$

$g^{(n)}(a)$ קיים $\Rightarrow$ $g^{(n-1)}$ מוגדרת בסביבה של a

$\left(g^{(n)}(a)\neq 0,\quad g^{(n-1)}(a)=0,\quad g^{(n)}(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g^{(n-1)}(x)}{x-a}\right)$ $\Rightarrow$ $g^{(n-1)}(x)\neq 0$ לכל x בסביבה של a

משפט 2 על פונקציות $f^{(n-2)},g^{(n-2)}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ וגם $g^{(n-2)}(x)\neq 0$ בסביבה של a

אותו משפט 2 עוד $(n-2)$ פעמים $\Rightarrow$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}\overset{\circledast}{=}\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

משפט 4 (כלל L'Hôpital ל- $\frac{\infty}{\infty}$)
* f,g רציפות ב- $(a,b]$
* $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\infty$
* $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b]$
* $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (סופי או $\pm\infty$)

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וגם $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$