סמסטר קיץ, מועד א', תשנ"ט
תאריך הבחינה: 10.10.1999
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 130 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=31

קונה מעריך מוצר ב־ X שקלים. המוכר אינו יודע את X ומפרש אותו כמשתנה מקרי. המוכר קובע מחיר a. אם $X > a$, הקונה קונה את המוצר. אם $X \le a$, המוצר נשאר אצל המוכר שמעריך אותו ב־ b שקלים. כלומר, רווח המוכר Y ורווח הקונה Z הם משתנים מקריים

$$Y = (a-b)\mathbf{1}_{(a,\infty)}(X)\,, \qquad Z = (X-a)_+\,.$$

---

5 (א) מצא את Y^* ו־ Z^* באמצעות X^* (פונקצית ערכי חלוקה של X). מצא את F_Y, F_Z באמצעות F_X (פונקצית ההתפלגות המצטברת של המ"מ X). צייר את הגרפים.

. . . .

5 (ב) מצא את $\mathbb{E}Y$ באמצעות F_X. מצא את $\mathbb{E}Z$ בשתי דרכים: באמצעות X^* ובאמצעות F_X.

מעתה נניח ש־ $X \sim \mathrm{Exp}(c)$, כלומר $\mathbb{P}\big(\,X > x\,\big) = e^{-x/c}$ $\quad \forall x \ge 0$.

---

5 (ג) מצא את ה־ a האופטימלי (שמביא $\mathbb{E}Y$ למקסימום). מצא את ה־ $\mathbb{E}Y$ ו־ $\mathbb{E}Z$ עבור ה־ a האופטימלי. השווה $\mathbb{E}Y$ ו־ $\mathbb{E}Z$.

מעתה נניח ש־ a הוא אופטימלי.

---

6 (ד) מצא את F_{Y+Z}, את היצוג $F_{Y+Z} = p_{\mathrm{d}}F_{\mathrm{d}} + p_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{s}} + p_{\mathrm{ac}}F_{\mathrm{ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף לחלוטין), ואת הצפיפות f_{ac} של החלק הרציף לחלוטין. צייר את הגרף של F_{Y+Z}. מצא את תומך ההתפלגות של $Y+Z$.

. . . .

5 (ה) האם $(Y+Z)^* = Y^* + Z^*$?

. . . .

5 (ו) נתבונן בהתפלגות המשותפת של המ"מ Y, Z . האם יש לה חלק בדיד? חלק סינגולרי? חלק רציף לחלוטין? מה התומך שלה?

שאלה 2

=20

נסח והוכח את המשפט: אם $X : \Omega \to \mathbb{R}$, ... אז $X^{-1}(B)$ שייך לשדה מאורעות.

שאלה 3

=25

כמו בשאלה 1, מוכר קובע מחיר a_1 . קונה הראשון מעריך את המוצר ב– X_1 וקונה אותו אם $X_1 > a_1$. אם $X_1 \le a_1$, הקונה הראשון עוזב, והמוכר קובע מחיר הנחה a_2 לקונה השני שקונה את המוצר אם $X_2 > a_2$. אחרת המוכר זורק את המוצר.

---

5 (א) בטא את רווח המוכר Y , רווח קונה הראשון Z_1 ורווח קונה השני Z_2 באמצעות X_1, X_2 .

מעתה נניח ש– X_1, X_2 מ"מ ב"ת ש"ה, $F_{X_1} = F_{X_2} = F$.

---

5 (ב) בטא את $\mathbb{E}Y$ באמצעות F, a_1, a_2 .

מעתה נניח ש– $F(x) = 1 - e^{-x/c}$ לכל $x \ge 0$.

---

5 (ג) מצא את ה– a_1, a_2 האופטימליים.

מעתה נניח ש– a_1, a_2 הם אופטימליים.

---

5 (ד) מצא את $\mathbb{E}Y,\ \mathbb{E}Z_1,\ \mathbb{E}Z_2$.

. . . .

5 (ה) האם $(Z_1+Z_2)^* = Z_1^* + Z_2^*$?

שאלה 4

=27

קונה פונה למוכר הראשון ומקבל מחיר X_1 . בהסתברות p הקונה עוצר, ובהסתברות $1-p$ הוא פונה למוכר השני ומקבל מחיר X_2 . בהסתברות p הוא עוצר, ובהסתברות $1-p$ הוא פונה למוכר הבא, וכולי. יהי Y המחיר הקטן. כלומר, משתנים מקריים $N; X_1, X_2, \dots$ ב"ת, ו– $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$. נניח ש– $X_1, X_2, \dots$ ש"ה, בעלי פונקצית ההתפלגות המצטברת F וצפיפות F' .

---

5 (א) מצא את ההתפלגות של N , ולכל n מצא את ההתפלגות המותנית $F_{Y|N=n}(\cdot)$.

7 (ב) מצא את F_Y (בלתי מותנית), ולכל y מצא את ההתפלגות המותנית של N בהנתן $Y=y$.

7 (ג) מצא את התוחלת המותנית $\mathbb{E}\left(N \,\middle|\, Y \right)$.

8 (ד) בדוק ש– $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(N \,\middle|\, Y \right)\right) = \mathbb{E}N$.

שאלה 5

=27

יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות נורמלית $N(0,1)$.

---

4 (א) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad X_n \le 5 \quad ?$$

5 (ב) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad |X_n| \ge \frac{1}{n} \quad ?$$

5 (ג) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad |X_n| \ge \frac{1}{n^2} \quad ?$$

6 (ד) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad \sqrt{X_n^2 + X_{n+1}^2} \ge \frac{1}{n} \quad ?$$

7 (ה) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad \sqrt{X_n^2 + X_{n+1}^2 + \dots + X_{2n}^2} \ge 5 \quad ?$$
