סמסטר א', מועד א', תשס"ד
תאריך הבחינה: 04.02.2004
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

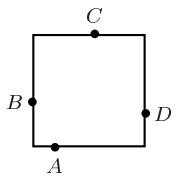
משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=40

בכל אחד מן ארבעה צלעות הריבוע בוחרים באקראי נקודה אחת, לפי ההתפלגות האחידה בצלע. אורך הצלע הוא 1 . ארבע הנקודות A, B, C, D ב"ת. נתבונן במרחק $X = |AB|$ בין נקודות A ו- B .



---

10 (א) מצא את החציון $\mathrm{Me}(X)$ של מ"מ X .

.....

10 (ב) מצא את הצפיפות $f_X(x)$ עבור $x \in (0,1)$.

רמז: אין צורך למצוא $f_X(x)$ עבור $x > 1$.

.....

10 (ג) מצא את החציון $\mathrm{Me}(X^2)$ ואת התוחלת $\mathbb{E}(X^2)$. האם $\mathbb{E}(X^2) > \mathrm{Me}(X^2)$?

.....

10 (ד) הוכח ש- $\mathbb{E}\left(|AB| \cdot |CD|\right) < \frac{2}{3}$.

רמז: אין צורך למצוא $\mathbb{E}\, X$.

שאלה 2

=30

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ **מ"מ ב"ת ש"ה. נתבונן בשתי תכונות**

$$\mathbb{E}|X_1| < 1\,; \qquad (*)$$

$$\underbrace{X_1 \ldots X_n}_{\text{כפל}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{כמעט תמיד.} \qquad (**)$$

---

15 **(א) האם** $(*)$ **גוררת** $(**)$**? (הוכח או תן דוגמה נגדית.)**

.....

15 **(ב) האם** $(**)$ **גוררת** $(*)$**? (הוכח או תן דוגמה נגדית.)**

שאלה 3

=50

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ **מ"מ ב"ת ש"ה, בעלי התפלגות אחידה** $\mathrm{U}(0,1)$.

---

7 **(א) הוכח ש-** $\mathbb{P}\left(X_1 < X_2 < X_3 < x\right) = \dfrac{x^3}{6}$ **לכל** $x \in [0,1]$.

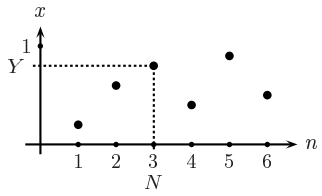
רמז:

$$\mathbb{P}\left(X_1 < X_2 < X_3 < x\right) = \mathbb{P}\left(X_2 < X_1 < X_3 < x\right) = \mathbb{P}\left(X_1 < X_3 < X_2 < x\right) = \ldots$$

.....

7 **(ב) האם מ"מ** $Y = \max(X_1, \ldots, X_{10})$ **ומאורע** $A = \{X_1 < X_2 < \cdots < X_{10}\}$ **תלויים או ב"ת?**

נתבונן במ"מ $Y = X_N$ **, כאשר** $N = \max\{n : X_1 < \cdots < X_n\}$.



---

9 **(ג) הוכח ש-** $\mathbb{P}\left(N = 3\right) = \dfrac{1}{8}$.

רמז: $\mathbb{P}\left(N = 3 \,\middle|\, X_3\right) = \mathbb{P}\left(X_1 < X_2 < X_3,\, X_3 \geq X_4 \,\middle|\, X_3\right)$.

.....

8 **(ד) הוכח שהצפיפות המותנה** $f_{Y|N=3}(y)$ **שווה ל-** $4y^3$ **עבור** $y \in (0,1)$.

רמז: $f_{Y|N=3} = f_{X_3|N=3}$.

.....

8 (ה) הוכח ש- $f_{Y|N}(y) = (N+1)y^N$ עבור $y \in (0,1)$.

.....

11 (ו) מצא את ההסתברות המותנה $p_{N|Y=y}(n)$. הוכח שההתפלגות המותנה של מ"מ $N-1$ בהנתן $Y=y$ היא התפלגות Poisson; מצא את הפרמטר שלה. האם $\mathbb{P}\left(N=n \,\middle|\, Y=y\right) = \mathbb{P}\left(N=n \,\middle|\, X_n=y\right)$ או לא?