סמסטר א', מועד א', תשס"ג
תאריך הבחינה: 22.01.2003
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=39

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{P}\left(X_1 > x\right) = e^{-x}$ עבור $x \geq 0$. נגדיר

$$Y_n = n \cdot \min(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

---

8 (א) האם מ"מ $Y_1, Y_2, \ldots$ ב"ת? האם הם ש"ה?

.....

9 (ב) נתבונן בהתפלגות משותפת של Y_n, Y_{2n}. האם היא תלויה ב- n?

רמז: $\min(X_1, \ldots, X_{2n}) = \min\big(\min(X_1, \ldots, X_n), \min(X_{n+1}, \ldots, X_{2n})\big)$.

.....

11 (ג) הסדרה של מ"מ $Y_1, Y_2, \ldots$, האם היא מתכנסת כמעט תמיד? בממוצע ריבועי? בהסתברות? בהתפלגות?

רמז: חשוב על מ"מ $Y_{2n} - Y_n$ והגבול שלו עבור $n \to \infty$.

.....

11 (ד) האם $Y_{n+1} - Y_n$ מתכנס ל- 0 בהסתברות? בממוצע ריבועי?

רמז: חשוב על $\mathbb{P}\left(\min(X_1, \ldots, X_n) = \min(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})\right)$.

שאלה 2

=42

יהיו X, Y מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{P}\left(X > x\right) = e^{-x}$ עבור $x \geq 0$. נגדיר מ"מ

$$V = \min(X, Y)\,; \quad W = X - Y\,.$$

7 (א) מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנה $F_{V|X=x}(v)$.

.....

7 (ב) מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(V \,\middle|\, X=x\right)$.

.....

7 (ג) מצא את ההתפלגות של מ"מ $\mathbb{E}\left(V \,\middle|\, X\right)$.

.....

7 (ד) וודא שמתקיים $\mathbb{E}(V)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(V \,\middle|\, X\right)\right)$.

.....

7 (ה) הראה שההתפלגות המותנה של W בהנתן $V \geq v$ לא תלויה ב- v . האם מ"מ V,W ב"ת? האם הם ש"ה?

רמז: חשוב על ההתפלגות המשותפת המותנה של X,Y בהנתן $V \geq v$.

.....

7 (ו) מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנה $F_{X|V=v}(x)$.

רמז: בטא את X באמצעות V,W .

שאלה 3

=39

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{P}\left(X_1=x\right)=0.1$ עבור $x=0,1,\ldots,8,9$. נגדיר

$$Y_k = \min\{n : X_n = X_{n-1} = \cdots = X_{n-k+1} = 0\}\,;$$

כלומר, Y_k מציין את הסוף של הצירוף הראשון של k אפסים ברציפות.

12 (א) מצא את ההסתברות לכך ש- $Y_k \geq 9^k$ בסופו של דבר.

רמז: הראה ש- $\mathbb{P}\left(Y_k \leq n\right) \leq n \cdot 10^{-k}$.

.....

14 (ב) מצא את ההסתברות לכך ש- $Y_k \leq 11^k$ בסופו של דבר.

רמז: $11^k - 11^{k-1} \geq k^2 \cdot 10^k$ עבור k מספיק גדול.

.....

13 (ג) האם הגבול

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln Y_k}{k}$$

קיים כמעט תמיד?