סמסטר ב', מועד ב', תשס"ב
תאריך הבחינה: 30.09.2002
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=40

במשחק מחשב, יריב מופיע במרחק מקרי R ומתקרב במהירות מקרית V; צריך לפגוע בו במשך הזמן $T = \frac{R}{V}$.
נניח שמ"מ R, V ב"ת, בעלי התפלגות אחידה: $R \sim \mathrm{U}(0,1)$, $V \sim \mathrm{U}(0,1)$.

---

10 (א) מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ T. האם יש ל- T אטומים? מה התומך של T?

.....

6 (ב) מצא את הצפיפות של T. האם היא רציפה?

.....

8 (ג) האם יש ל- T מרכז סימטריה? האם יש ל- $\ln T$ מרכז סימטריה?

.....

8 (ד) האם T אינטגרבילי? אם כן, מצא את התוחלת $\mathbb{E}T$.
האם $\ln T$ אינטגרבילי? אם כן, מצא את התוחלת $\mathbb{E}\ln T$.

.....

8 (ה) מצא את ההסתברויות המותנות $\mathbb{P}\left(T < 0.5t \,\middle|\, T < t\right)$, $\mathbb{P}\left(T > 2t \,\middle|\, T > t\right)$.
האם הן תלויות ב- t?

שאלה 2

=30

יהיו R, V מ"מ ב"ת, $R \sim \mathrm{U}(0,1)$, $V \sim \mathrm{U}(0,1)$, $T = R/V$ (כמו בשאלה 1).

---

8 (א) מצא את פונקציות ההתפלגות המצטברות המותנות $F_{T|V=v}(t)$, $F_{T|R=r}(t)$.

.....

22 (ב) מצא את הצפיפויות הדו-ממדיות $f_{R,V}$, $f_{R,T}$, $f_{V,T}$;
את התומכים של שלוש ההתפלגויות הדו-ממדיות;
ואת הצפיפויות המותנות $f_{T|V}$, $f_{V|T}$.
רמז: חשוב, מה כדאי למצוא קודם ומה אחר-כך.

שאלה 3

=50

12 (א) מ"מ X,Y מקיימים $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathrm{Var}\left(X\right) = 1$, $\mathrm{Var}\left(Y\right) = 1$,
$\mathrm{Cov}\left(X,\, Y\right) = 0$.
האם יתכן ש- $\mathbb{P}\left(\sqrt{X^2+Y^2} > 10\right) > 0.1$?
(אם יתכן, תביא דוגמה; אם לא יתכן, הוכח.)
רמז: חשוב על $\mathbb{E}(X^2+Y^2)$.

.....

13 (ב) נקודה מקרית (X,Y) בעלת התפלגות אחידה במעגל $x^2+y^2=r^2$.
מצא את אליפסת הפיזור של (X,Y) .
רמז: חשוב על $\mathbb{E}(X^2+Y^2)$, שוב.

.....

12 (ג) התפלגות דו-ממדית של (X,Y) מכילה אטום של ההסתברות 0.9 בנקודה $(0,0)$,
ושאר ההסתברות מתפלגת אחיד במעגל $x^2+y^2=r^2$.
מצא את אליפסת הפיזור של (X,Y) .

.....

13 (ד) מ"מ X,Y הם כמו ב-(א).
האם יתכן ש- $\mathbb{P}\left(\sqrt{X^2+Y^2} > 10\right) > 0.01$?
(אם יתכן, תביא דוגמה; אם לא יתכן, הוכח.)