סמסטר א', מועד א', תש"ס
תאריך הבחינה: 26.01.2000
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

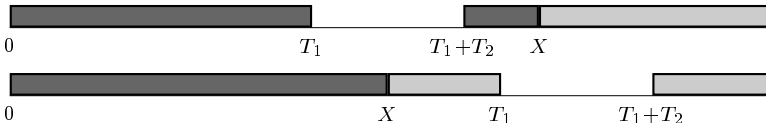
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 130 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=28

פקיד התחיל לטפל בתיק ראשון, שיקח שעה, ב- 8^{00} . בזמן מקרי $8+T_1$ הוא יפסיק לזמן מקרי T_2 , וימשיך.



נניח ש- T_1, T_2 מ"מ ב"ת, $T_1 \sim \mathrm{U}(0,2)$, $T_2 \sim \mathrm{U}(0,0.5)$. יהי $8+X$ הזמן שהפקיד יסיים את התיק הראשון.

---

6 (א) מצא את F_X (פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ X), ואת X^* (פונקצית ערכי חלוקה של X). צייר את הגרפים.

.....

4 (ב) מצא את החציון $x_{1/2}$ של X (או כל החציונים, אם יש יותר מאחד); אותו הדבר עבור הרבעונים $x_{1/4}, x_{3/4}$.

.....

6 (ג) מצא את תומך ההתפלגות של X , את היצוג $F_X = p_{\mathrm{d}}F_{X,\mathrm{d}} + p_{\mathrm{s}}F_{X,\mathrm{s}} + p_{\mathrm{ac}}F_{X,\mathrm{ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף בהחלט), ואת הצפיפות $f_{X,\mathrm{ac}}$ של החלק הרציף בהחלט.

.....

6 (ד) מצא את $\mathbb{E}X$ (תוחלת של X) בשתי דרכים (לפי בחירתך).

.....

6 (ה) עבור אלו $\alpha > 0$ מתקיים $\mathbb{E}\,\frac{1}{(1.5-X)^{\alpha}} < \infty$?

שאלה 2

=20

נסח והוכח את המשפט: $\mathbb{E}\varphi(X) = \int \varphi(x) f_X(x)\,dx$.

שאלה 3

=28

יהי X כמו בשאלה 1, ויהי $Y = T_1 + T_2$.

---

9 (א) מצא את המקדמים $p_{\rm d}, p_{\rm s}, p_{\rm ac}$ של היצוג $P_{X,Y} = p_{\rm d}P_{X,Y,{\rm d}} + p_{\rm s}P_{X,Y,{\rm s}} + p_{\rm ac}P_{X,Y,{\rm ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף לחלוטין של ההתפלגות המשותפת של מ"מ X, Y), ואת תומך ההתפלגות המשותפת.

.....

10 (ב) מצא את $\operatorname{Cov}\big(X,\,Y\big) = \mathbb{E}\,(XY) - (\mathbb{E}\,X)(\mathbb{E}\,Y)$. האם X, Y מתואמים? האם הם תלויים?

.....

9 (ג) מצא את הצפיפות של $P_{X,Y,{\rm ac}}$.

שאלה 4

=24

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה אינטגרביליים. נגדיר

$$a_n = \mathbb{E}\,\max(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

---

7 (א) האם בהכרח $a_1 \le a_2 \le \ldots$? האם בהכרח $a_1 < a_2 < \ldots$?

.....

8 (ב) מצא תנאי הכרחי ומספיק עבור X לכך שהסדרה (a_n) חסומה.

.....

9 (ג) הוכח ש- $\dfrac{a_n}{n} \to 0$.

רמז: הוכח ש- $\frac{1}{n}\big(1 - F^n(x)\big) \le 1 - F(x)$, $\int_M^\infty \big(1 - F(x)\big)\,dx \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$.

שאלה 5

=30

בקופסה אחת יש U שקלים, בקופסה אחרת $2U$ שקלים. שני שחקנים בוחרים קופסאות באקראי. יהי X מספר השקלים אצל השחקן הראשון, Y — אצל השני. כלומר,

$$X = VU\,,$$
$$Y = (3-V)U\,,$$
$$\mathbb{P}\left(V=1\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\left(V=2\right),$$

ומ"מ U,V ב"ת. נניח שיש צפיפות $f_U(\cdot)$, ו- $f_U(u) > 0$ לכל $u \in (0,+\infty)$, ו- $f_U(u) = 0$ לכל $u \in (-\infty, 0)$.

---

7 (א) בטא את $F_{X|V=1}(\cdot)$, $F_{X|V=2}(\cdot)$ (פונקציות מצטברות מותנות), ואת $f_{X|V=1}(\cdot)$, $f_{X|V=2}(\cdot)$ (צפיפויות מותנות) באמצעות f_U.

.....

7 (ב) בטא את $\mathbb{P}\left(V=1 \,\middle|\, X=x\right)$, $\mathbb{P}\left(V=2 \,\middle|\, X=x\right)$ באמצעות f_U.

.....

7 (ג) בטא את $\mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, X=x\right)$ באמצעות f_U.
רמז: $\mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, X=x\right) = \mathbb{E}\left(\frac{3-V}{V}X \,\middle|\, X=x\right)$.

.....

9 (ד) מצא תנאי הכרחי ומספיק עבור f_U לכך ש- $\mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, X\right) > X$ כמעט תמיד.
האם קיימת f_U כזאת?
האם $\mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, X\right) > X$ גורר $\mathbb{E}Y > \mathbb{E}X$?