סמסטר קיץ, מועד ב', תשנ"ט
תאריך הבחינה: 22.11.1999
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 130 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

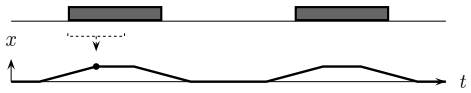
=28

רמזור מחליף צבעים באופן הבא:

צבע	...	ירוק	צהוב	אדום	צהוב	ירוק	...
משך (שניות)	...	25	5	25	5	25	...

ציפור באה בזמן מקרי ומסתכלת ברמזור במשך 15 שניות. יהי X משך הזמן שה–ציפור רואה ירוק ($X=0$ אם לא היה ירוק).

רמז:



---

6 (א) מצא את F_X (פונקציית ההתפלגות המצטברת של המ"מ X), ואת X^* (פונ–קצית ערכי חלוקה של X). צייר את הגרפים.

.....

4 (ב) מצא את החציון $x_{1/2}$ של X (או כל החציונים, אם יש יותר מאחד); אותו הדבר עבור הרבעונים $x_{1/4}, x_{3/4}$.

.....

6 (ג) מצא את תומך ההתפלגות של X, את היצוג $F_X = p_{\rm d}F_{X,{\rm d}} + p_{\rm s}F_{X,{\rm s}} + p_{\rm ac}F_{X,{\rm ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף לחלוטין), ואת הצפיפות $f_{X,{\rm ac}}$ של החלק הרציף לחלוטין.

.....

6 (ד) מצא את $\mathbb{E}X$ (תוחלת של X) בשתי דרכים (לפי בחירתך).

.....

6 (ה) האם קיימת $\mathbb{E}\,\dfrac{1}{X-5}$?

שאלה 2

=20

נסח והוכח את הלמה המבטאת את $\mathbb{E}X$ באמצעות F_X לכל מ"מ חסום.

שאלה 3

=27

יהי X כמו בשאלה 1, ויהי Y משך הזמן של הצהוב, ו- Z משך הזמן של האדום (ברור ש- $X+Y+Z=15$).

---

9 (א) מצא את המקדמים $p_{\mathrm{d}}, p_{\mathrm{s}}, p_{\mathrm{ac}}$ של היצוג $P_{X,Z} = p_{\mathrm{d}}P_{X,Z,\mathrm{d}} + p_{\mathrm{s}}P_{X,Z,\mathrm{s}} + p_{\mathrm{ac}}P_{X,Z,\mathrm{ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף לחלוטין של ההתפלגות המשותפת של המ"מ X, Z), ואת תומך ההתפלגות המשותפת.

.....

9 (ב) מצא את $\mathrm{Cov}\left(X,\, Z\right) = \mathbb{E}(XZ) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Z)$. האם X, Z מתואמים? האם הם תלויים?

.....

9 (ג) מצא את $F_{Z|X=x}(z)$ (פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנית) לכל x מהתומך של X.

שאלה 4

=27

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות נורמלית $N(0,1)$.

---

9 (א) הוכח ש-

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_{2n}^2} \le r\right) \le \frac{1}{n!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^n .$$

רמז: השתמש בהתפלגות Gamma.

.....

9 (ב) הוכח ש-

$$\lim_{r\to 0+} n!\left(\frac{2}{r^2}\right)^n \mathbb{P}\left(\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_{2n}^2} \le r\right) = 1 .$$

.....

9 (ג) מצא מתוך (ב) את הנפך של הכדור בממד $2n$. בדוק את תשובתך עבור $n=2$.
רמז: השתמש בצפיפות המשותפת של $X_1, \ldots, X_{2n}$ ב- 0.

שאלה 5

=28

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות נורמלית $N(0,1)$.

---

7 (א) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad n|X_{2n+1}| > |X_{2n}| \quad ?$$

.....

7 (ב) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad n^2|X_{2n+1}| > |X_{2n}| \quad ?$$

.....

7 (ג) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad n|X_{n+1}| > |X_n| \quad ?$$

.....

7 (ד) האם כמעט תמיד קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad n^2|X_{n+1}| > |X_n| \quad ?$$