סמסטר ב', מועד ב', תשנ"ט
תאריך הבחינה: 31.08.1999
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

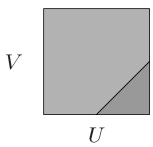
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 125 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

משה בא לפגישה בזמן מקרי U בעל התפלגות אחידה בין $8:10$ ל־ $8:20$. חיים בא לפגישה בזמן מקרי V בעל התפלגות אחידה בין $8:15$ ל־ $8:25$. הראשון מחכה לשני. יהי X הזמן שחיים מחכה למשה ($X=0$ אם משה בא ראשון), ו־ Y הזמן שמשה מחכה לחיים ($Y=0$ אם חיים בא ראשון). =29



(א) מצא את F_X (פונקציית ההתפלגות המצטברת של המ"מ X), את X^* (פונקציית ערכי חלוקה של X), ואת $x_{1/2}$ (החציון של X). צייר את הגרפים. 5

רמז: כדאי להתחיל בהתפלגות של $U-V$.

(ב) אותו הדבר עבור Y. 4

(ג) מצא את היצוג $F_X = p_{\mathrm{d}} F_{X,\mathrm{d}} + p_{\mathrm{s}} F_{X,\mathrm{s}} + p_{\mathrm{ac}} F_{X,\mathrm{ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף לחלוטין), ואת הצפיפות $f_{X,\mathrm{ac}}$ של החלק הרציף לחלוטין. 5

(ד) אותו הדבר עבור Y. 4

(ה) מצא את $\mathbb{E}X$ (תוחלת של X) בשתי דרכים (לפי בחירתך). 6

(ו) מצא את $\mathbb{E}Y$. 5

רמז: כדאי להראות קודם ש־ $Y-X=V-U$.

שאלה 2

=24

יהיו X,Y כמו בשאלה 1. נתבונן בהתפלגות המשותפת של המ"מ X,Y .

. . . .

6 (א) האם יש לה חלק בדיד? חלק סינגולרי? חלק רציף לחלוטין? (הוכח את תשובתך.)

. . . .

6 (ב) האם המ"מ X,Y תלויים? (הוכח את תשובתך.)

. . . .

12 (ג) מצא את $F_{Y|X=x}(y)$ (פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנית).

שאלה 3

=36

נניח שמ"מ X,Y מקיימים

$$\forall p \in (0,1) \quad Y^*(p) = X^*\left(\frac{1+p}{3}\right).$$

. . . .

6 (א) האם ההתפלגות של X קובעת חד–ערכית את ההתפלגות של Y ? האם ההתפל–גות של Y קובעת חד–ערכית את ההתפלגות של X ? (הוכח את תשובתך.)

. . . .

6 (ב) בטא את $F_Y(\cdot)$ באמצעות $F_X(\cdot)$.

. . . .

8 (ג) האם התפלגות שרירותית של Y יכולה להתקבל כך? מצא תנאי הכרחי ומספיק.

. . . .

8 (ד) האם בהכרח $\mathbb{E}|Y| \le \mathbb{E}|X|$? (הוכח את תשובתך.)

. . . .

8 (ה) האם בהכרח $\mathbb{E}|Y| \le 10\mathbb{E}|X|$? (הוכח את תשובתך.)

שאלה 4

=12

יהיו X,Y מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות נורמלית $N(0,1)$. מצא את

$$\mathbb{E}\Big(\cos(3x-y)\sin(x+3y)\Big).$$

שאלה 5

=24

יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות נורמלית $N(0,1)$.

12 (א) הוכח שבהסתברות 1 קיים N (מיקרי) כך ש–

$$\forall n > N \quad \max(X_{n^2+1}, X_{n^2+2}, \dots, X_{n^2+2n}) > 3\,.$$

12 (ב) האם אפשר להחליף בסעיף (א) את n^2+2n ב– n^2+20 ?