סמסטר ב', מועד א', תשנ"ט
תאריך הבחינה: 12.07.1999
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

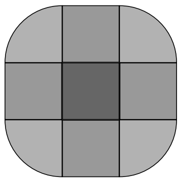
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 125.
רצוי לענות על כל השאלות. בכל מקרה הציון לא יעלה על 100.

בהצלחה!

שאלה 1

=32



במישור נתונים ריבוע Q בעל שטח 1, וקבוצה Ω של כל הנקודות ω כאלה שהמרחק R בין ω לבין Q (כלומר, לבין הנקודה הקרובה מתוך Q, פנימית או בשפה) הוא קטן מ־ 1.
בוחרים באופן מקרי נקודה ω מתוך Ω לפי התפלגות אחידה (דו־ממדית).
יש למצוא:

4 (א) את $\mathbb{P}\big(R=0\big)$.

4 (ב) את F_R (פונקצית ההתפלגות המצטברת של המ"מ R). צייר את הגרף של F_R.

4 (ג) את R^* (פונקצית ערכי חלוקה של R). צייר את הגרף של R^*.

רמז: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff ax^2+bx+c=0$.

4 (ד) את החציון $r_{1/2}$ של R (או כל החציונים, אם יש יותר מאחד).

4 (ה) את היצוג $F_R=p_{\mathrm{d}}F_{R,\mathrm{d}}+p_{\mathrm{s}}F_{R,\mathrm{s}}+p_{\mathrm{ac}}F_{R,\mathrm{ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינגולרי, חלק רציף לחלוטין), ואת הצפיפות $f_{R,\mathrm{ac}}$ של החלק הרציף לחלוטין.

8 (ו) את $\mathbb{E}R$ (תוחלת של R) בשתי דרכים (לפי בחירתך).

4 (ז) עבור אלו $\alpha>0$ מתקיים $\mathbb{E}\,\dfrac{1}{(1-R)^\alpha}<\infty$?

שאלה 2

=24

יהיו Q, Ω, R, ω כמו בשאלה 1, בקואורדינטות קרטזיות (x,y) כך ש־ $Q = \{(x,y) : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}$. תהי (X,Y) הנקודה מתוך Q הקרובה ל־ ω.

....

(א) מצא את היצוג $P_{X,Y} = p_{\mathrm{d}} P_{X,Y,\mathrm{d}} + p_{\mathrm{s}} P_{X,Y,\mathrm{s}} + p_{\mathrm{ac}} P_{X,Y,\mathrm{ac}}$ (חלק בדיד, חלק סינ־גולרי, חלק רציף לחלוטין של ההתפלגות המשותפת של המ"מ X,Y), ואת הצפיפות הדו־ממדית $f_{X,Y,\mathrm{ac}}$ של החלק הרציף לחלוטין. 6

....

(ב) האם המ"מ X,Y תלויים? (הוכח את תשובתך) 6

....

(ג) מצא את $F_{Y|X=x}(y)$ (פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנית). 12

שאלה 3

=36

תהי $F(\cdot)$ פונקצית התפלגות מצטברת. לכל $\alpha \in (0,\infty)$ נגדיר $F_\alpha(x) = \big(F(x)\big)^\alpha$.

....

(א) הוכח ש־ $F_\alpha(\cdot)$ היא פונקצית התפלגות מצטברת. 4

יהי X_α מ"מ בעל התפלגות F_α, ו־ A_α קבוצת האטומים של X_α.

....

(ב) בטא את X_α^* (פונקצית ערכי חלוקה של X_α) באמצעות X_1^*. 4

....

(ג) האם בהכרח $A_\alpha = A_1$? האם בהכרח $\mathbb{P}\big(X_\alpha \in A_\alpha\big) = \mathbb{P}\big(X_1 \in A_1\big)$? 4

....

(ד) יהיו $\alpha_n \to \alpha \in (0,\infty)$. האם בהכרח F_{α_n} מתכנס חלש ל־ F_α ? 4

....

(ה) יהיו $\alpha_n \to \infty$. האם F_{α_n} מתכנס חלש לאיזו F שגם היא פונקצית התפלגות מצטברת? (תמיד כן? אף פעם לא? לפעמים? מתי בדיוק? מהיא F ?) 8

....

(ו) כמו (ה) אבל עבור $\alpha_n \to 0$. 4

....

(ז) נתבונן ב־ $\mathbb{P}\big(X_\alpha \in A_\alpha\big)$ כפונקציה של α. האם היא מונוטונית? האם היא רציפה? האם יש לה גבולות כאשר $\alpha \to 0$ ו־ $\alpha \to \infty$? אם כן, מה הגבולות? 8

שאלה 4

=11

יהיו X, Y, Z מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות נורמלית $N(0,1)$. מצא את ההתפלגות של המ"מ $U = (X-Y)^2 + (Y-Z)^2 + (Z-X)^2$.

רמז. אפשר לבטא את U באמצעות $X^2 + Y^2 + Z^2$ ו- $(X+Y+Z)^2$.

שאלה 5

=22

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה.

11 (א) הוכח שכמעט בטוח קיים N (מיקרי) כך ש- $X_{n^2} \geq \min(X_1, X_2, \ldots, X_{n^2-1})$ $\forall n > N$.

11 (ב) האם אפשר להחליף בסעיף (א) את n^2 ב- n?
