סמסטר ב', מועד ב', תשס"ז
תאריך הבחינה: 12.10.2007
מספר קורס: 0365-2111

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשב כיס.
סה"כ הנקודות הוא 120. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

=50

בכד ראשון יש i כדורים, ובכד שני $N-i$ כדורים. בוחרים באקראי אחד מ- N הכדורים ומעבירים אותו לכד האחר. חוזרים על זה עד שמספר הכדורים בכד הראשון יגיע ל- 0 או ל- $\frac{N}{8}$. (N מתחלק ב- 8 , ו- $0 < i < \frac{N}{8}$.) נגדיר מאורעות
A : מספר הכדורים בכד הראשון יגיע ל- 0 ;
B : מספר הכדורים בכד הראשון יגיע ל- 0 ב- i שלבים
(כלומר, $i \leftarrow i-1 \leftarrow \cdots \leftarrow 1 \leftarrow 0$).

---

10 (א) הוכח שהתהליך יסתיים כמעט בטוח.

.....

10 (ב) מצא את ההסתברות של B .

.....

10 (ג) הוכח שהתהליך $M_n = h(X_n)$ הוא supermartingale; כאן X_n הוא מספר הכדורים בכד הראשון בשלב ה- n , והפונקציה h מוגדרת ע"י

$$h(x) = x!(N-x)!\Big(1+\frac{4x}{N}\Big)\,, \quad x = 0, 1, \ldots, \frac{N}{8}\,.$$

.....

10 (ד) בעזרת (ג) הוכח ש-

$$\mathbb{P}\,(A) \le \frac{1+\frac{4i}{N}}{\binom{N}{i}}\,.$$

.....

10 (ה) האם ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\,(B \,|\, A)$ שואפת ל- 1 כאשר $N \to \infty$?

שאלה 2

=40

10 (א) צופה טלוויזיה צופה באחד משני ערוצים. כשמתחילה הפסקת פרסומות הוא מעביר לערוץ האחר.
בממוצע יש בשעה λ_1 הפסקות כאלה בערוץ 1 , ו- λ_2 הפסקות בערוץ 2 .
ברגע נתון, מה הסיכוי לצפיה בערוץ 1 ?
הפסקות פרסומות הן קצרות, ומהוות זרמי פואסון ב"ת. התפלגות הערוצים הנצפים היא סטציונרית.

.....

10 (ב) כמו (א), אבל יש שלושה ערוצים ($1, 2, 3$), וכל מעבר הוא לערוץ הבא (כלומר, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow \cdots$). הקצבים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ידועים. מצא את ההתפלגות הסטציונרית.

.....

10 (ג) כמו (ב), אבל כל מעבר הוא קדימה או אחורה בסיכוים $0.5, 0.5$ ללא תלות באחרים. (קדימה זה $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow \cdots$, אחורה זה $3 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \leftarrow \cdots$).

.....

10 (ד) כמו (ב), (ג), אבל מעבר אחורה קיים מערוץ 3 בלבד (כלומר, $1 \leftarrow 2$, $2 \leftarrow 3$, אך $3 \leftarrow (1$ או $2)$).

שאלה 3

=30

10 (א) האם יתכן שתהליך X_n הוא שרשרת מרקוב, אך תהליך $Y_n = X_n^2$ אינו שרשרת מרקוב?
(הוכח או תן דוגמת נגד.)

.....

10 (ב) האם יתכן שתהליך X_n אינו שרשרת מרקוב, אך תהליך $Y_n = X_n^2$ הוא שרשרת מרקוב?
(הוכח או תן דוגמת נגד.)

.....

10 (ג) האם יתכן שתהליך X_n הוא שרשרת מרקוב, אך תהליך $Y_n = X_n^3$ אינו שרשרת מרקוב?
(הוכח או תן דוגמת נגד.)