סמסטר ב', מועד א', תשס"ז
תאריך הבחינה: 26.07.2007
מספר קורס: 0365-2111

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשב כיס.
סה"כ הנקודות הוא 115. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

הסתברויות המעבר של שרשרת מרקוב X_n הן

$$p(i,i-1) = 0.5 = p(i,i+1)$$

לכל i שלם, חיובי או שלילי, פרט ל- $i=0$;

$$p(0,-1) = \frac{1}{11}\,, \quad p(0,+1) = \frac{10}{11}\,.$$

בהנתן $X_0 = 0$ מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(V_{10} < V_{-1}\right)$ לבקר ב- 10 לפני ביקור הראשון ב- (-1) . =25

שאלה 2

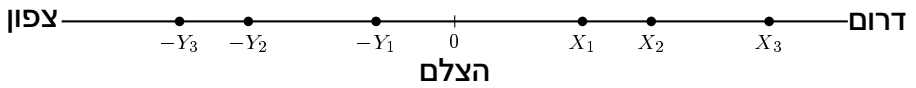
עשר מפלצות $A_1, \ldots, A_{10}$ נלחמות בעשר מפלצות $B_1, \ldots, B_{10}$. ראשית, בקרב בין A_1 לבין B_1 , A_1 מנצחת בסיכוי $\frac{a_1}{a_1+b_1}$ כאשר a_1 --- כח של A_1 , b_1 --- כח של B_1 . אם A_1 מנצחת, היא אוכלת את B_1 , והכח שלה עולה ל- a_1+b_1 , והיא נלחמת ב- B_2 . אחרת, B_1 אוכלת את A_1 ונלחמת ב- A_2 . וכן הלאה, עד המוות של A_{10} או B_{10} .

האם ההסתברות (הכוללת) למוות של A האחרונה תלויה בסדר של המפלצות $A_1, \ldots, A_{10}$?

רמז: יש פה מרטינגל. . . =25

שאלה 3

צלם צילם כביש עם מכוניות שמהוות זרם פואסוני (בעל קצב קבוע).



(א) מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X_1 < \frac{1}{2}X_2\right)$ לכך שהמרחק מהצלם למכונית הקרובה דרומה קטן מחצי המרחק מהצלם למכונית השניה דרומה. =10

(ב) מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(Y_1 < \frac{1}{2}X_2\right)$ לכך שהמרחק מהצלם למכונית הקרובה צפונה קטן מחצי המרחק מהצלם למכונית השניה דרומה. =20

שאלה 4

שני פקידים משרתים שני תורים. לקוחות באים בזרם פואסוני בקצב λ לכל תור. זמן השירות (של לקוח אחד) בעל התפלגות מעריכית עם תוחלת $\frac{1}{2\lambda}$. אין שום קשר בין התורים. בשיווי משקל (כלומר, התפלגות סטציונרית), יהי X מספר הלקוחות במשרד (כלומר, אצל הפקידים וגם בתורים). מצא $\mathbb{P}\left(X = 2\right)$. =15

שאלה 5

אותו הדבר שבשאלה 4, אבל לקוחות עוברים מתור לתור כאשר כדאי לעבור. =20