הוכחת טענות טכניות:

Appendix I

(1) קיים בסיס המקיים $[e_\alpha,e_\beta]=\pm r\, e_{\alpha+\beta}$

$0=(ad\, e_\alpha)^r e_\beta$ עבור $r\in\mathbb{Z}_+$ מינימלי

$\mathfrak{g}_\mathbb{Z}=span_\mathbb{Z}\{e_\alpha,h_\alpha\}_{\alpha\in R}$ (2) יציב תחת $ad(e_\beta^n/n!)$ לכל $n\in\mathbb{Z}_+$ $\beta\in R$

(3) $h,e\in\mathfrak{g}$ $\quad [h,e]=\lambda e$

אז לכל $p\in\mathbb{C}[X]$ $\quad p(h)e^m=e^m p(h+\lambda m)$

<u>הוכחה</u>: $he=\lambda e+eh=e(\lambda+h)$

$$he^m=hee^{m-1}=e(\lambda+h)e^{m-1}=e^m(m\lambda+h)$$

$$h^ie^m=hh^{i-1}e^m=he^m(m\lambda+h)^{i-1}=e^m(m\lambda+h)^i$$

(·) נכון לצירופים ליניארים

(4) עבור $u\in U$ $\quad m\in\mathbb{Z}_+$ $\quad C_{u,m}:=\binom{u}{m}$

עבור $e,f,h\in U$ $\quad \langle e,f,h\rangle=sl_2$ מתקיים

$$e^m/m!\; f^n/n! = \sum_{j=0}^{\min\{m,n\}} \frac{f^{n-j}}{(n-j)!}\, C_{h-m-n+2j,j}\, \frac{e^{m-j}}{(m-j)!}$$

<u>הוכחה</u>: שלב I: (·) $hf^n=f^n(h-2n)$

(·) באינדוקציה $e\, f^n/n! = \frac{f^n}{n!}e+\frac{f^{n-1}}{(n-1)!}(h-n+1)$

$$e\, f^{n+1}/(n+1)! = \frac{1}{n+1}\, ef\, f^n/n! = \frac{1}{n+1}(fe-h)\, f^n/n!$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[f\left(f^n/n!\, e+\frac{f^{n-1}}{(n-1)!}(h-n+1)\right)-h\, f^n/n!\right]$$

$$= \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}e+\frac{n}{n+1}\frac{f^n}{n!}(h-n+1)-\frac{1}{n+1}h\frac{f^n}{n!}$$

$$= f^{n+1}/(n+1)!\, e+\frac{f^n}{n!}(h-(n+1)+1)+\frac{1}{(n+1)!}\left(hf^n+(n+1)f^n-f^n(h-n+1)\right)$$

$$= f^{n+1}/(n+1)!\, e+\frac{f^n}{n!}(h-(n+1)+1)+\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left(hf^n-f^n(h-2n)\right)}_{0}$$

(·) מטענה טכנית 3 $\quad e\, C_{h+x,*}=C_{h-2+x,*}$

<u>שלב II</u>: אינדוקציה על m

הוכחת טענות טכניות:

(5) $u^{(n)} \in U(\mathfrak{g})$. הסידרה $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ תיקרא סידרת חזקות מחולקות (Sequence of divided powers) אם $\Delta u^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} u^{(j)} \otimes u^{(n-j)}$

(i) $x \in \mathfrak{g}$ $\quad u^{(n)} = x^n/n!$ סידרת חזקות מחולקות

<u>הוכחה:</u>

$$\Delta\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}(\Delta(x^n)) = \frac{1}{n!}(\Delta(x))^n$$

$$= \frac{1}{n!}(x\otimes 1 + 1\otimes x)^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x\otimes 1)^j(1\otimes x)^{n-j}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^j \otimes x^{n-j} = \sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\otimes\frac{x^{n-j}}{(n-j)!}$$

(ii) $x \in \mathfrak{g}$ $\quad u^{(n)} = C_{x,n}$

הוכחה: תרגיל

(6) $\{u_i^{(n)}\}_{i\le k}$ סדרות של חזקות מחולקות

עבור $(n_1,\dots,n_k) = N \in \mathbb{Z}_+^k$ $\quad U_N = u_1^{(n_1)}\cdot\ldots\cdot u_k^{(n_k)}$

נניח $\{U_N\}_{N\in\mathbb{Z}_+^k}$ ב.ת.ל. מעל $\mathbb{Z}$

$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{U_N\}_{N\in\mathbb{Z}_+^k}$. (V קו-אלגברה $\quad D = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V,\mathbb{Z})$ אלגברה קומוטטיבית)

נניח $(i\le k)$ $\gamma_i \in D$ כך ש

$$\gamma_i(U_N) = \begin{cases} 1 & U_N = u_i^{(1)} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נסמן $\gamma_N := \gamma_1^{n_1} * \ldots * \gamma_k^{n_k}$

אזי $\gamma_N(U_M) = \mathbb{1}_{\{N=M\}}$

הוכחה: אינדוקציה $(\mathbb{Z}_+^k = 6\omega)$ בסיס: נכון ל $\delta_{ij} \in \mathbb{Z}_+^k$ $i\le k$

$$\gamma_{N+M}(e_k) = \gamma_N * \gamma_M(e_k)$$

$$= \underbrace{\varphi_{\mathbb{Z}}}_{\text{כפל ב } \mathbb{Z}} \circ \gamma_N\otimes\gamma_M \circ \Delta(e_k) = \varphi_{\mathbb{Z}}\, \gamma_N\otimes\gamma_M \sum_{L+J=k} e_L\otimes e_J \underset{\text{הנחה}}{=} \mathbb{1}_{\{k=N+M\}}$$

$R = R^+ \cup R^-$
$\Pi \subset R$

$\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ פשוטה למחצה $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha$

(·) $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ $(e_{-\alpha} = f_\alpha)$ $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

(·) $\alpha(h_\alpha) = 2$. $\alpha^\vee = H_\alpha$ $h_\alpha = \frac{2H_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$

<u>הגדרה</u>: $\mathfrak{g}_\mathbb{Z} = \mathrm{Span}_\mathbb{Z}\left\{\{h_\alpha\}_{\alpha\in R^+}, \{e_\alpha\}_{\alpha\in R}\right\}$ ($\{e_\alpha\}$ כבטענה טכנית 1)

$\Pi \subseteq R$ בסיס. $\Pi = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ $R^+ = \{\beta_i\}_{i\in r}$

$\mathfrak{h} \xrightarrow[\text{killing}]{\sim} \mathfrak{h}^\vee$. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ בסיס ל R מעל $\mathbb{Z}$

לכן $\{h_i\}_{i\in I}$ בסיס ל $\mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{h_\alpha\}_{\alpha\in R^+}$

סה"כ: $\{h_i\}_{i\in I} \cup \{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ בסיס חופשי מעל $\mathbb{Z}$ ל $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$

טענה טכנית (1) $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ אלגברת Lie מעל $\mathbb{Z}$

טענה טכנית (2) $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ יציב תחת $\mathrm{ad}\, e_\alpha^n/n!$ לכל $n\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha\in R$

<u>הגדרות</u>: (·) $U(\mathfrak{g}) \supseteq B := \left\langle \{e_\alpha^n/n!\}_{n\in\mathbb{Z}_+, \alpha\in R} \right\rangle_\mathbb{Z}$ (נוצר כאלגברה מעל $\mathbb{Z}$)

(·) תהי $\mathfrak{n}$ האלגברת Lie הנוצרת מעל $\mathbb{C}$ ע"י $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R^+}$

$U(\mathfrak{n})$ האלגברה האוניברסלית של $\mathfrak{n}$

(·) עבור $M = (m_1,\dots,m_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ נגדיר $e_M = \frac{e_{\alpha_1}^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{e_{\alpha_r}^{m_r}}{m_r!}$ (קבענו סדר על R^+)

$\{e_M\}_{M\in\mathbb{Z}_+^r}$ בסיס Poincare-Birkhoff-Witt של $U(\mathfrak{n})$

(·) תהי $E \subseteq U(\mathfrak{g})$ תת האלגברה הנוצרת מעל $\mathbb{Z}$ ע"י האיברים $\{e_\alpha^n/n!\}_{n\in\mathbb{Z}_+, \alpha\in R^+}$

טענה 1: $\{e_M\}_{M\in\mathbb{Z}_+^l}$ בסיס חופשי מעל $\mathbb{Z}$ ל E

הוכחה: נגדיר $E_1=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{e_M\}$. ברור כי מהגדרה $E_1\subseteq E$

תהי $\alpha_i\in R^+$ $n\in\mathbb{Z}_+$ $\frac{e_{\alpha_i}^n}{n!} = e_{\underset{\text{מקום } i}{(0,\dots,n,\dots,0)}}$

לכן היוצרים של E ב E_1 ומספיק להוכיח כי E_1 סגור לכפל.

לכל $j\le l$ קיים $S_j\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ כך ש

(1) $S_j(e_\alpha)=0$ לכל $\alpha\in R$

(2) $S_j(h_{\alpha_j})=1$

(3) לכל $x\in\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ $S_j(x)\in\mathbb{Z}$

ניתן להגדיר כזאת עבור $i\le l$ כך ש $\alpha_i\in\Pi$

כמו כן לכל $\alpha_j\in R^+$ קיימת $\Pi_j\subseteq R$ בסיס המקיים $\alpha_j\in\Pi_j$

וכעת ניתן להגדיר את S_j על היוצרים של $\mathfrak{g}$

תהי $\rho: H\to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ הצגת ה adjoint

אז $\rho: U(H)\to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ כלומר $\mathfrak{g}$ $U(H)$-מודול

נגדיר $U(H)'=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U(H),\mathbb{C})$. עבור $j\le l$ נגדיר $\phi_j\in U(H)'$

$$\phi_j(u)=S_j(u\cdot e_{-\alpha_j})$$

תכונות: $S_j(h_{\alpha_j}) = \phi_j(e_{\underset{\delta_{jl}}{(0,\dots,1,\dots,0)}})=1$

עבור $M\neq\delta_{jl}$ $\phi_j(e_M)=0$

לפי טענה טכנית 2 ($\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ יציב תחת $ad(\frac{e_{\alpha}^n}{n!})$) ותכונה (3) (S_j ב $\mathbb{Z}$)

מתקיים כי $\phi_{j|E}:E\to\mathbb{Z}$ (מקבל ערכים ב $\mathbb{Z}$)

עבור $N\in\mathbb{Z}_+^l$ $\phi_N=\phi_1^{n_1}*\dots*\phi_l^{n_l}$

כאשר עבור $f,g\in U(H)'$ $f*g=\varphi_{\mathbb{C}}\circ f\otimes g\circ\Delta_{U(H)}$

מטענה טכנית (6) $\phi_N(e_M)=\mathbb{1}_{\{N=M\}}$

המשך הוכחת טענה 1:

כעת נניח בשלילה כי E_1 אינו סגור לכפל.

אזי קיימים $N,M\in\mathbb{Z}_+^2$ $e_Ne_M\notin E_1$

(אם אינו סגור לכפל אז אינו סגור לכפל של איברי בסיס)

מעל $\mathbb{C}$ ניתן לכתוב $e_Ne_M=\sum_{p\in\mathbb{Z}_+^2} c_p e_p$

$e_Ne_M\notin E_1$ לכן קיים $c_p\notin\mathbb{Z}$. תהי L מינימלי בסדר הלקסיקוגרפי כך ש- $c_L\notin\mathbb{Z}$

נפעיל את ϕ_L על המשוואה ונקבל כי

$c_L=\phi_L(e_Ne_M)\notin\mathbb{Z}$ סתירה לכך ש- $e_Ne_M\in E$

ו-ϕ_L נותנת ערכים שלמים על E.

(*) נשים לב כי בחרנו סדר שרירותי על R^+
(חשיבות: הישרנו בין תכונות הקשורות בסדר ואלו שלא)

<u>הגדרה</u>: עבור $K\in\mathbb{Z}_+^l$ נגדיר $h_K=C_{h_1,k_1}\cdot\ldots\cdot C_{h_l,k_l}$

כאשר $C_{x,n}=\binom{x}{n}$

$\{h_K\}_{K\in\mathbb{Z}_+^l}$ בסיס מעל $\mathbb{C}$ ל-$U(\mathfrak{h})$ (PBW)

מטענה טכנית 5(ii) $\mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{h_K\}$ יוצר אלגברת Hopf מעל $\mathbb{Z}$

כלומר $\Delta(\mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{h_K\})\subseteq \mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{h_K\}\otimes\mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{h_K\}$

כמו כן (Appendix II) לכל $k\in\mathbb{Z}_+$ $m_i\in\mathbb{Z}$

$C_{h_i-m_i,k}\in\mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{h_K\}$

(*) <u>הגדרה</u> תהי $\mathfrak{n}_-$ האלגברת Lie הנוצרת מעל $\mathbb{C}$

ע"י $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R^-}$.

$R^-=\{\beta_1,\ldots,\beta_t\}$, $f_M=\frac{e_{\beta_1}^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{e_{\beta_t}^{m_t}}{m_t!}$. $\{f_M\}$ בסיס

חופשי מעל $\mathbb{Z}$ ל-E_- כאשר $E_-=\langle\{e_\alpha^n/n!\}_{\alpha\in R^-,\ n\in\mathbb{Z}_+}\rangle_\mathbb{Z}$

שמחה ברקאי   Lie Algebras   חלק 1   (4)

הגדרה: $Q\subseteq R$ תיקרא סגורה אם לכל $\alpha,\beta\in Q$

$$\alpha+\beta\in Q \longleftarrow \alpha+\beta\in R$$

טענה 2: תהי $Q\subseteq R$ סגורה כך ש $Q\cap -Q=\emptyset$ $Q=\{\beta_i\}_{i\le k}$

נסמן $E_Q=\langle\{e_\beta^n/n! \mid {\beta\in Q \atop n\in\mathbb{Z}_+}\}\rangle_{\mathbb{Z}}$ האלגברה הנוצרת מעל $\mathbb{Z}$

אזי $\{q_M\}_{M\in\mathbb{Z}_+^k}$ בסיס חופשי מעל $\mathbb{Z}$ ל E_Q

כאשר $q_M=e_{\beta_1}^{m_1}/m_1!\cdots e_{\beta_k}^{m_k}/m_k!$

הוכחה: נגדיר $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_\beta\}_{\beta\in Q}=\mathfrak{n}_Q$

מהנחות על Q (סגורה, $Q\cap -Q=\emptyset$) $\mathfrak{n}_Q\le\mathfrak{g}$ תת אלגברת Lie

$E_Q\subseteq U(\mathfrak{n}_Q)$. $\{q_M\}$ בסיס ל $U(\mathfrak{n}_Q)$ מעל $\mathbb{C}$.

עבור $i\le k$ $u\in E_Q$ נגדיר

$$\phi_i(u)=S_{\beta_i}(u\cdot e_{-\beta_i})$$

מסיימים כמו בטענה 1

טענה 3: יהיו $\alpha,\beta\in R$ בת"ל. $m,n\in\mathbb{Z}_+$ $Q=(\mathbb{Z}_+\alpha+\mathbb{Z}_+\beta)\cap R$

אזי $e_\alpha^n/n!\cdot e_\beta^m/m! = e_\beta^m/m!\cdot e_\alpha^n/n! + \sum_{|M|<n+m} r_M q_M$ עבור $r_M\in\mathbb{Z}$

הוכחה: נגדיר $u:=e_\alpha^n/n!\, e_\beta^m/m! - e_\beta^m/m!\, e_\alpha^n/n!$

$$0=\bar u\in U^{n+m}(E_Q)/U^{n+m-1}(E_Q) \qquad (P\text{-}B\text{-}W)$$

מטענה 2 $r_M\in\mathbb{Z}$

מסקנה מטענה 3: $Q\subseteq R$ סגורה $Q\cap -Q=\emptyset$

נניח $\{\beta_i\}_{i\le k}$ $\{\alpha_i\}_{i\le k}$ שתי מניות של Q $\left(\{q_N^\beta\}\ \{q_N^\alpha\}\right)$ (המתאים מת.ו..)

עבור $v\in E_Q = c\cdot\prod_{i\le n}\beta_{m_i}^{n_i}$ $(c\in\mathbb{C}^\times)$ נגדיר $l(v)=\sum n_i$

<u>הגדרה</u> של v

אזי לכל $M\in\mathbb{Z}_+^k$ קיים $M'\in\mathbb{Z}_+^k$ כך ש

(1) $|M'|=|M|$

(2) $q_M^\alpha=q_{M'}^\beta+\sum_{|N|<|M|} r_M q_N^\beta$

משפט: $\{f_N h_k e_M\}_{N,M\in\mathbb{Z}_+^t,\ k\in\mathbb{Z}_+^t}$ בסיס חופשי מעל $\mathbb{Z}$ ל B

הוכחה: $\{f_N h_k e_M\}$ בסיס P-B-W מעל $\mathbb{C}$ ל B

נגדיר $U_\mathbb{Z} = span_\mathbb{Z}\{f_N h_k e_M\}$ (קבענו סדר על R^-, R^+)

שלב I: נראה כי $U_\mathbb{Z}\subseteq B$.

$\{f_N\},\{e_M\}\subseteq B$ לכן מספיק להראות, כי לכל i ו $n\in\mathbb{Z}_+$

$C_{h_i,n}\in B$

הוכחה באינדוקציה על n: $n=0$ $C_{h_i,n}=1\in B$

נניח כי לכל $k<n$ $C_{h_i,k}\in B$

לפי טענה מכינה (4) $e^n/n!\, f^n/n! = C_{h,n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{n-k}}{(n-k)!} C_{h-2n+2k,k}\frac{e^{n-k}}{(n-k)!}$

הנחה + Appendix II $\Leftarrow$ המחובר השני $\sum_{k=0}^{n-1}(-)$ ב B

$\Leftarrow$ $C_{h,n}\in B$ $\Leftarrow$ $U_\mathbb{Z}\subseteq B$

שלב II: נראה כי $U_\mathbb{Z}\cdot U_\mathbb{Z}\subseteq U_\mathbb{Z}$. (יספיק כי היוצרים של B ב $U_\mathbb{Z}$)

(.) $U_\mathbb{Z}\cdot E\subseteq U_\mathbb{Z}$ מטענה 1

(.) $U_\mathbb{Z}\cdot C_{h,n}\subseteq U_\mathbb{Z}$ מטענה מכינה (3)

לכן נותר להראות כי $U_\mathbb{Z}\cdot E_-\subseteq U_\mathbb{Z}$

(.) תהי $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ מניה כלשהו של R. $v=c\prod e_{\alpha_i}^{n_i}$, $c\in\mathbb{C}$ יהי $l(v)=\sum n_i$

תהי $u\in U_\mathbb{Z}$ $v\in E_-$ נוכיח באינדוקציה על $l(u\cdot v)$

כי $u\cdot v\in U_\mathbb{Z}$

(.) מספיק להוכיח עבור $u=e_M$ $M\in\mathbb{Z}_+^t$ (כי $f_N h_k f_M h_L\subseteq U_\mathbb{Z}$ מטענה מכינה (3))

(.) מספיק להוכיח עבור $v=f_N$

בסיס האינדוקציה $|N|+|M|=0$ $\Leftarrow$ $e_M=1$ $f_N=1$

ואין מה להוכיח

שמחה ברקוני   Lie Algebras   חלק 1   (6)

צעד האינדוקציה: יהיו $M,N\in\mathbb{Z}_+^k$ נניח כי לכל $M',N'\in\mathbb{Z}_+^k$

$$|M'|+|N'|<|M|+|N| \longrightarrow e_{M'}f_{N'}\in U_\mathbb{Z}$$

הטענה נובעת כעת מטענה טכנית (4) + מסקנה מטענה (3). וכך:

(·) נניח קודם כי $f_N=f_\alpha^n/n!=f^n/n!$ עבור $\alpha\in R^-$. נסדר $R^+=(\tilde\alpha_1,\dots,\tilde\alpha_{k-1},-\alpha)$

$\tilde e_{M'}=e_{\tilde\alpha_1}^{m_1'}/m_1'!\cdots e_{\tilde\alpha_{k-1}}^{m_{k-1}'}/m_{k-1}'!\cdot e_{-\alpha}^{m_k'}/m_k'!$. ממסקנה לטענה 3 נוכל לכתוב $e_M=\tilde e_{M'}+\sum_{|N|<|M|}r_N\tilde e_N$, $|M'|=|M|$

$$e_M f^n/n! = \tilde e_{M'} f^n/n! + \underbrace{\sum_{|N|<|M|} r_N \tilde e_N f^n/n!}_{\text{ב-}U_\mathbb{Z}\text{ מהנחת האינדוקציה}}$$

נגדיר $S=\mathbb{Z}_+^{k-1}\times\{0\}$. מטענה טכנית (4) נוכל להניח כי $M'\in S$

(הדרך איך נובעת משימוש בטענה טכנית (4))

$i=\max\{i \mid m_i'\neq 0\}$ $\tilde M=(m_1',\dots,m_{i-1}',0,\dots,0)$

$$\tilde e_{M'} f^n/n! = \tilde e_{\tilde M}\, e_{\tilde\alpha_i}^{m_i'}/m_i'!\; f^n/n! \underset{\substack{\text{טענה 3}\\ T=\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}_+\tilde\alpha_i}}{=} \tilde e_{\tilde M}\, f^n/n!\; e_{\tilde\alpha_i}^{m_i'}/m_i'! + \tilde e_{\tilde M}\Big(\sum_{|N|<n+m_i} r_N t_N\Big)$$

וכעת נוכל להשתמש בהנחת האינדוקציה על שני המחוברים

(·) ממסקנה מטענה (3), טענה טכנית (4)

מתקיים $e_M f^n/n! = \sum_{|N|\le |M|+n} r_N w_N f^n/n!\, e_N$ $w_N\in U(\mathfrak{h})$, $r_N\in\mathbb{Z}$

כלומר סלינו בדרך

זה מוכיח את הטענה עבור $v\in E_-$ איבר כללי.

סה"כ $U_\mathbb{Z}\cdot U_\mathbb{Z}\subseteq U_\mathbb{Z}$

$\Leftarrow$ $B\subseteq U_\mathbb{Z}$ ⊠

תהי (ρ,V) הצגה סופית של g

h פועלת אלכסונית על V

$$V=\bigoplus_{\lambda\in h^\vee} V_\lambda$$

אוסף המשקלות של V (יסומן $\Delta(V)$) $=\{\lambda\in h^\vee \mid V_\lambda\neq\{0\}\}$

(·) לכל $\lambda\in\Delta(V)$ $h\in h$ $\lambda(h)\in\mathbb{Z}$

(·) $g_\alpha(V_\lambda)\subseteq V_{\lambda+\alpha}$ $(\alpha\in R)$

$\Pi\subseteq R$ בסיס (מגדיר R^+, R^-)

נגדיר $Bor(\Pi)=h\oplus\bigoplus_{\alpha\in R^+} g_\alpha$ $N(\Pi)=\bigoplus_{\alpha\in R^+} g_\alpha$

(·) $N(\Pi), Bor(\Pi)\le g$ תתי אלגבראות Lie

$[Bor(\Pi), Bor(\Pi)]=N(\Pi)$

$N(\Pi)$ נילפוטנטי $\Leftarrow$ $Bor(\Pi)$ פתירה

לכן ממשפט Lie קיים $\lambda\in\Delta(V)$ $0\neq v^+\in V_\lambda$ כך שלכל $\alpha\in R^+$ $g_\alpha v^+=0$.

λ נקרא המשקל המרבי (Highest weight)

v^+ נקרא וקטור מקסימלי או וקטור ממשקל מרבי.

<u>טענה</u>: $V=g v^+$ $R^+=\{\alpha_i\}_{i\le r}$ $\Pi=\{\alpha_i\}_{i\le l}$ $v^+\in V_\lambda$

(א) $V=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{f_M\cdot v^+\}_{M\in\mathbb{Z}_+^r}$

(ב) המשקלות של V הם מהצורה $\mu=\lambda-\sum_{i\le l}k_i\alpha_i$

(ג) לכל $\mu\in h^\vee$ $\dim V_\mu<\infty$ וכן $\dim V_\lambda=1$

<u>הוכחה</u>: (א) $\{f_M h_L e_N\}$ בסיס ל g

$f_M h_L e_N\cdot v^+=f_M k v^+$

(ב) ל $f_M v^+$ משקל $\lambda-\sum_{i\le r} m_i\alpha_i$

וניתן להביא לצורה הרצויה

(ג) לכל $0\neq M\in\mathbb{Z}_+^r$ $\sum m_i\alpha_i\neq 0$ $\Leftarrow$ $f_M v^+\notin V_\lambda$

$\Leftarrow$ $\dim V_\lambda=1$

עבור $\lambda-\mu\in R$ "המסלולים" (המכוונים) מ λ ל μ-λ סופיים

כי R סופית

שמחה ברקאי Lie Algebras חלק ב 9

$V \in U(\mathfrak{g})$-Mod ממימד סופי (הצגה סופית של $\mathfrak{g}$)

משקלות $\Delta(V)$

סריג $V_\mathbb{Z} \subseteq V$ ($V_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} = V$) יקרא טוב (Admissible)

אם $B(V_\mathbb{Z}) \subseteq V_\mathbb{Z}$

משפט: (א) נסמן $V_\mathbb{Z}^\mu = V_\mathbb{Z} \cap V^\mu$ ($\mu \in \Delta(V)$)

לכל סריג טוב $V_\mathbb{Z}$ מתקיים $V_\mathbb{Z} = \bigoplus_{\mu \in \Delta(V)} V_\mathbb{Z}^\mu$

(ב) קיים סריג טוב $V_\mathbb{Z} \subseteq V$

הוכחה: (א) עבור $\mu \in \Delta(V)$ נגדיר $d(\mu) = (\mu(h_1), \dots, \mu(h_\ell)) \in \mathbb{Z}^\ell$

תהי $\lambda \in \Delta(V)$ קיים $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_\ell]$ $f(\mathbb{Z}^\ell) \subseteq \mathbb{Z}$

$f(d(\lambda)) = 1$, $f(d(\mu)) = 0$ לכל $\mu \neq \lambda$ ($\Delta(V)$ סופי)

(טענה 2 Appendix II)

$u_\lambda := f(h_1, \dots, h_\ell)$. $u_\lambda \in U(\mathfrak{h})$ (טענה 1 Appendix II)

[עבור $h_k \in U(\mathfrak{h})$ $h_k(\lambda) = \binom{\lambda(h_1)}{k_1} \cdot \ldots \cdot \binom{\lambda(h_\ell)}{k_\ell}$ הראינו, זו הפעולה של [illegible] ל $U(\mathfrak{h})$]

$\sum_{\mu \in \Delta(\mu)} u_\mu = Id_V$. ($u_\mu$ הטלה לרכיב V^μ)

עבור $w \in V_\mathbb{Z}$ $w_\mu = u_\mu \cdot w \in V_\mathbb{Z}$ (יציב תחת B) . $w = \sum_{\mu \in \Delta(V)} w_\mu$

לכן $V_\mathbb{Z} = \bigoplus_{\mu \in \Delta(V)} V_\mathbb{Z}^\mu$ (ראינו כי ההטלות הם איברים ב B)

(ב) $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה לכן כל הצגה סופית היא סכום של הצגות אי פריקות.

לכן ניתן להניח V אי פריקה.

$v^+ \in V$ וקטור מירבי, ממשקל מירבי λ

נגדיר $V_\mathbb{Z} = Bv^+$. $Bv^+ = f_M \mathbb{Z} v^+ \Leftarrow Bv^+ \cap V^\lambda \subseteq \mathbb{Z} v^+$

[הסבר: $\{f_M h_L e_N\}$ בסיס ל B $\underbrace{\prod_{i \le \ell} \binom{\lambda(h_i)}{k_i}}_{\mathbb{Z}} v^+ = h_k \cdot v^+$]

לכל $|M| = \sum_{i \le \ell} m_i >> 0$ $f_M v^+ = 0$ (כי יש מספר סופי של משקלים)

$\Leftarrow$ $V_\mathbb{Z}$ נ.ס. $V_\mathbb{Z} = Bv^+ \supseteq BBv^+ = B(V_\mathbb{Z})$