לכבוד

פרופ' אהוד הורשובסקי

עבודה במסגרת קורס

תולדות המתמטיקה - 80402

הגיאומטריה האקסיומטית של הילברט ותהיות קאנטיאניות

מגיש: לירן גורדון

מ.ת.ז 036035814

שמו של הילברט מתקשר מיד עם המפעל הפורמאליסטי של ראשית המאה ה-20, מפעל אשר נדמה כי סותר את תפיסת העולם הקאנטיאנית המבוססת על אינטואיציה והחלל. בעבודה זו אבקש להציג בצורה קצרה את תפיסתו של הילברט את מבנה המדע, תפקיד המערכת האקסיומאטית ואבקש להראות כי תפיסתו מעוגנת חזק במסגרת החשיבה הקאנטיאנית. אולם, עלי להתריע ולומר כי הילברט נטה לבטא אמירות כוללניות באשר לטבע המתמטיקה ויחסה למדע ואין לבקש למצוא מבנה פילוסופי מוגדר אפריורי בכתביו. כאשר הוא טוען טענות פילוסופיות אין הן נתמכות על ידי טיעונים מוצקים ולעיתים אף סותר דברים שנאמרו או שיאמרו. לאו קורי[1] סבור שלא ניתן לדבר על ה"פילוסופיה של המתמטיקה" של הילברט כי אם על תמונת המתמטיקה שלו[2].

מימי היוונים ועד המאות האחרונות הגיאומטריה נחשבה כמדע המבוסס ביותר; ואשר לשאר ענפי המתמטיקה, להם התייחסו בחשדנות רבה. בספרי היסודות של אויקלידס מעניין לשים לב כי בהרבה מקרים בהם אין כל צורך בשרטוט הדמונסטרטיבי הוא בכל זאת מופיע, דבר המצביע על כוחה וסמכותה של ההוכחה הגיאומטרית. אריסטו, בספרו אנאליטיקות אחרונות (פרק 7), אסר על שימוש מדע אחד במדע אחר, ספר זה, אשר הפך להיות הבסיס ל"מדע" בימי הביניים (שכלל לא מתאים לשום ספר "מדעי" אחר אותו כתב אריסטו ובפרט לא לספר היסודות של אויקלידס[3] [גם אם יש הנוטים לעשות הקבלה הרי הקבלה זו שגויה לחלוטין]) שיתק (יחד עם חשדנות יוונית טבעית) כל ניסיון לערב בין תחומים כמו מתמטיקה ופיסיקה יחדיו (דבר שארכימדס העז לעשות). הדים לתפיסה זו ניתן ניתן לשמוע אצל נולט[4], איש המאה ה-18 וחבר באקדמיה הבריטית למדעים, אשר אמר כי 'זה מסוכן עבור פיסיקאי לפתח טעם טוב מידי בגיאומטריה' ואף ביטויים כמו זה של קסטל[5] 'המערכת של ניוטון מבחינה מתמטית, גיאומטרית והיפותטית היא נפלא, [אבל] מאבדת את כושר השכנוע שלה ... היום הכל מתקבל בפיסיקה, משיכה, ואקום, וכל ההיפותזות האבסורדיות, מאחר שהגיאומטריה עושה במדע זה ללא כל מעצור. תחת מעטפת הגיאומטריה אין כל בושה מהפרדוקס, רעיון מוזר או הגיון לוקה. עלי לומר, במלוא בכבוד הרב ביותר לניוטון, שיש אך גיאומטריה בשיטה שלו וכי כל פיסיקה טובה תעלם אם נוסף ונותיר לו לעשות כן...'. בדוגמאות אלה רציתי אך להראות כי "הפשטה" זו של הפיסיקאלי לגיאומטרי אינה כה טריוויאלית ומדובר בלא פחות ממהפכה מחשבתית אשר ארכה שנים רבות. ייחוסה האוטונומי של הגיאומטריה כמדע חללי הוא ללא ספק פרי הפילוסופיה של קאנט, שם הוא קושר את החלל והגיאומטריה זו בזו ומראה כי לתבונה אין דבר וחצי דבר עימה. בספרו ביקורת התבונה הטהורה הוא כותב:

אף עיקרון אחד של הגיאומטריה הטהורה אינו מנתח[כלומר אינו ניתן לרדוקציה]. *שקו ישר בין שתי נקודות הוא הקצר ביותר – הוא מרכיב. כי, המושג שלי על הישר אינו מכיל משהו על גודל, אלא איכות בלבד. לאמור, המושג של 'הקצר*

---

[1] בעבודה זו אתבסס על שני טקסטים של לאו קורי מאוניברסיטת ת"א, ניתן למצוא אותם באתר האינטרנט www.tau.ac.il/~corry

[2] Leo Corry, Eternal Truth pp.4-5

[3] לקריאה בנושא ראה ספרה של אורנה הררי: Knowledge and demonstration : Aristotle's Posterior analytics, Boston : Kluwer, 2004.

[4] פיסיקאי צרפתי שחי בין 1700-1770.

[5] פיסיקאי צרפתי שחי בין 1688-1757 אשר האמין כי את המדע יש לבנות על הגיון בלבד ולא על תצפית.

ביותר' מתווסף כולו, ואי אפשר להוציאו, על ידי שום ניתוח, מתוך המושג של קו ישר. הלכך, מן ההכרח הוא להסתייע כאן בהסתכלות, שכוחה בלבד ההרכבה היא באפשר[6].

הבה ניתן לו לפילוסוף את מושג המשולש ונניח בידיו לברר, לפי דרכו, כיצד יתיחס סכום זוויותיו לזווית ישר. אין לו אלא מושג של תבנית המותחמת בשלושה קווים ישרים, ובה מושג של אותו מספר הזוויות. והנה, יהרהר במושג זה כדרך שיהרהר – לא יפיק כל מאומה שיהא חדש. בידו לנתח ולברר את מושג הקו הישר, או של זווית, או של המספר שלושה, אך לא יהא בידו להגיע לתכונות אחרות, שאינן טמונות כלל במושגים אלה. אך יזקק לשאלה זו הגיאומטריקן – מיד הוא מתחיל לבנות את המשולש. לפי שהוא יודע, כי שתי זוויות ישרות יחד סכומן בדיוק כסכום כל הזוויות המצרניות ביחד, שאפשר למתחן מנקודה אחת על הקו הישר – הרי הוא מאריך צלע אחת של משולשו ומקבל שתי זוויות מצרניות, השוות ביחד לשתי זוויות ישרות. והנה הוא מחלק את הזוויות החיצוניות מתוך שהוא מותח קו מקביל לצלע המשולש שממול, והוא רואה, שכאן נוצרת זווית מצרנית חיצונית, השווה לזווית פנימית, וכ'. בדרך זו הוא מגיע על ידי שלשלת של היקשים, שכהוא מודרך תמיד על ידי ההסתכלות, לפתרון השאלה, המתקבל על הדעת לגמרי והוא כללי כאחת[7].

בשתי הדוגמאות הללו מראה קאנט כי הגיאומטריה איננה אנליטית אלא סינתטית (אפריורית), אין להשיג את משפטיה מתוך מושגיה אלא באמצעות התבוננות. הבניה היא בנייה בחלל (כלומר הבניה היסודית בטרם נבצע הפשטה), רק כך יכול האדם להשיג את אותן תובנות. חשוב לי להדגיש כי קאנט עצמו לא היה סתם פילוסוף אלא גם מתמטיקאי ופיסיקאי ותרם תרומה משמעותית לפיסיקה הניוטונית. כמו כן ניתן לראות בקאנט כמטרים האסכולה האינטנציונלית, עובדה שיכולה להעלות את השאלה כיצד הילברט מתבסס על קאנט ומאידך דוחה את תפיסת המתמטיקה שלו. קאנט כותב:

משום כך, מן הצורך הוא להכיר גם את משפט הסתירה כעיקרון כללי והמספיק לחלוטין של כל הכרה מנתחת; אך למעלה מזה פגה סמכותו, ואין להשתמש בו כמבחן מספיק לאמת. כי, מה ששום הכרה לא יהא בידה להתנגד לו, מבלי לבטל את עצמה, - עושה אמנם את המשפט הזה לתנאי שאי אפשר בלעדיו, אך אין הוא עושה אותו טעם קובע של אמתות הכרתנו. אולם, לפי שאנו עוסקים, לאמתו של דבר, בחלק המרכיב של הכרתנו בלבד – הרי בכך זמן ועידן נהא חייבים להיזהר, כי לעולם לא נפעל בניגוד לעיקרון זה שאין לפגוע בו; אולם, לעולם לא נוכל לצפות לכך, שיתבאר על ידיו משהו בעניין אמתו של אותו סוג ההכרה[8].

משפט הסתירה אינו יכול ללמדנו על הדבר משום "ששום הכרה לא יהא בידה להתנגד לו, מבלי לבטל את עצמה" וכן אין אפשר שבאמצעותו "יתבאר על ידיו משהו בעניין אמתו של אותו סוג הכרה". עם זאת קאנט כן רואה חשיבות לשימוש השלילי בחוק הסתירה (בשונה מן השימוש בחיובי – הקונסטרוקטיבי המוסיף מידע על הדבר) כחוק המסייע בידינו למצוא שגיאות וסתירות. אפשר לומר כי להוכחה על דרך השלילה תוקף חלש יותר מזו הקונסטרוקטיבית מכיוון שהיא איננה מוסיפה מידע על הדבר.

---

[6] קאנט ע, ביקורת התבונה הטהורה, תורגם ע"י ש.ברגמן ונ. רוטנשטרייך, מוסד ביאליק ירושלים, 1954, עמ' 6-35.
[7] שם, 1954, עמ' 357.
[8] שם, 1954, עמ' 114.

כעת אבקש לעקוב אחר תפיסת הילברט את הגיאומטריה ולבחון את האקסיומטיזציה אותה הוא ביקש לערוך. בהרצאה אותה נשא הילברט בקונינסברג (עירו של קאנט) בשנת 1891 כתב סטודנט כי:

הגיאומטריה – אומר הילברט – היא המדע העוסק בתכונות החלל. הוא שונה במהותו ממתמטיקה טהורה כמו תורת המספרים, אלגברה, או תורת הפונקציות. התוצאות של האחרון מושגות באמצעות מחשבה טהורה ... המצב הוא לחלוטין שונה במקרה של גיאומטריה. איני יכול לעולם לחדור את תכונות החלל באמצעות רפלקסיה טהורה, במידה דומה איני יכול לזהות את החוקים הבסיסים של המכניקה, את חוק הגרוויטציה או כל חוק פיסיקאלי אחר בצורה דומה. החלל אינו תוצאה של הרפלקסיה. אלא היא ניתנת לי באמצעות החושים.[9]

תפיסתו זו את הגיאומטריה כמדע "חללי" חוזרת שוב ושוב, בהרצאה נוספת משנת 1894 כותב סטודנט כי:

בין הרשמים או העובדות של הניסיון הנגלות לנו דרך ההתבוננות בטבע, יש סוג מיוחד, כלומר, העובדות המתייחסות לצורה החיצונית של הדברים. הגיאומטריה עוסקת בעובדות אלה ... גיאומטריה היא מדע אשר היסודות שלה מפותחים לדרגה כזו, שכל עובדותיה יכולות להיות מוסקות לוגית מעובדות קודמות. הדבר שונה מאוד בתורת החשמל או האופטיקה, שם עדיין הרבה עובדות חדשות מתגלות. אף על פי כן, ביחס למקורותיה, גיאומטריה היא מדע טבע.[10]

במקום אחר מוסיף הילברט ואומר:

הגיאומטריה גם [כמו המכניקה] נובעת מההתבוננות בטבע, מהניסיון. מבחינה זו, היא מדע ניסויי ... אך יסודותיה הניסויים הם כל כך בלתי ניתנים להפרכה ומקובלים על הכלל, הם אושרו באופן כה נחרץ, שאין כל צורך בהוכחתם.
מעבר לכך, כל שנדרש הוא לגזור יסודות אלה מקבוצה מינימאלית של אקסיומות בלתי תלויות וכך לבנות את כל בניין הגיאומטריה באמצעים לוגים טהורים. בצורה זו [כלומר, באמצעות שימוש באמצעים אקסיומטיים] הגיאומטריה הופכת למדע מתמטי טהור. [...] ועל כן מכניקה לא יכולה עדין להיות מתוארת כיום כמדע מתמטי טהור, לפחות ביחס לגיאומטריה. עלינו לשאוף שהיא תהפוך לאחת. עלינו תמיד להרחיב את גבולות המתמטיקה, בשם האינטרס המתמטי שלנו, ובשם האינטרס המדעי בכלל.[11]

אין הבדל מהותי בין המכאניקה והגיאומטריה פרט למידת הסיבוכיות והניתוח האקסיומטי המיושם עבור האחרון יועיל במידה דומה בשאר המדעים הפיסיקאלים[12]. קל לראות עד כמה עמדתו זו של הילברט דומה לזו של קאנט, אולם כפי שנראה אח"כ, תתעורר שאלה קשה ביחס לפורמליזם זה – האם יש כלל מקום לפורמליזם בתוך המבנה הקאנטיאני. שאלה נוספת שגם היא, מקורה בתפיסה הקאנטיאנית היא ביחס לקדימות ענפי המדע. קאנט סבור כי לגיאומטריה מעמד רם יותר מזה של האלגברה.הוא כותב כי 'והכרת הגודל של ההסתכלות בכלל המשתלשל מכך (המספר) ' (עמ' 361), המספר הינו גלגול של הגודל המתפשט, האלגברה הינה הפשטה של הגיאומטריה. האלגברה תקפה היא אך הפשטה ופחות מיידית. השאלה המעניינת היא אם כן בייחס לאלגברה ושאר ענפי המתמטיקה הטהורים, בעוד שאת הגיאומטריה ובתקווה, יום אחד, גם המכאניקה, ניתן להפוך למדע טהור באמצעות אמצעים אקסיומטיים הרי אלה הראשונים הם מלכתחילה טהורים, הכיצד?

---

9 The German original is quoted in Toepell 1986, 21.
10 Quoted from manuscript lecture notes of 1894, in Toepell 1986, 58
11 Corry L., Hilbert and the Axiomatization of Physics, Kluwer Academic, 2004, pp.45.
12 Eternal Truth, pp.7

אף כי הגיאומטריה, האופטיקה והמכיניקה נותרות מדע אמפירי, הוא מתייחס לאריתמטיקה לדוגמא פעם כענף טהור ופעם כענף אמפירי מה שמוביל להעצמת הבלבול[13]. מחד גיסא, הילברט מתייחס גיאומטריה כמדע "פיסיקאלי" ומאידך מבקש להפוכה לענף מתמטי טהור, מקס בורן, תלמידו של הילברט מוסיף לבלבול, במאמר שפרסם לרגל יום הולדתו ה-60 בכתב העת *Die Naturwissenschaften* הוא כותב:

> הפיסיקאי מבקש לחקור איך הדברים הם בטבע; ניסוי ותיאוריה הם עבורו אך אמצעים להשגת המטרה. הבנת הסיבוכיות של התופעה עימה הוא מתעמת בכל ניסוי, הוא מתנגד לרעיון של תיאוריה מוחלטת. על כן הוא מתעב את המילה "אקסיומה", אשר בשימושה המקובל מעלה את רעיון האמת המוחלטת. הפיסיקאי אם כן נוהג בהתאם לאינסטינקט הטבעי שלו, שהדוגמטיזם הוא האויב הנורא מכל של מדע הטבע. המתמטיקאי לעומתו אין כן עניין בתופעות עובדתיות, כי אם ביחסים לוגים. בשפתו של הילברט, הטיפול האקסיומטי של דיציפלינה באמצעות אקסיומות אינו מצביע על אמיתות מוחלטת, כי אם על הדרישה המתודולוגית הבאה: תאר את ההנחות בתחילת הדיון, עצור לרגע וחקור האם הנחות אלו מיותרות או סותרות זו את זו[14].

בורן סבור כי הגישה האקסיומטית של הילברט לא ביקשה את האמיתות הנצחיות כי אם הבנה ברורה יותר תפיסותינו הטבעיות וכן, לספק את האמצעים לתקן טעיות אשר עלולות לעלות מכך, האם הילברט היה "מתמטיקאי" או שמא "פיסיקאי"?.

הפרסום הראשון בו הילברט מיישם את תפיסת האקסיומטיזציה המודרנית הוא ב- *Grundlagen der Geometrie*, בספר זה רואים ביטוי מוקדם של העמדה ה"פורמליסטית" אותה אימץ אח"כ. תחת קריאה זו מתקבל כי הילברט ראה בגיאומטריה מערכת דדוקטיבית בה המשפטים נגזרים מהאקסיומות באמצעות כללי היקש. אקסיומות ומשפטים אלה הם פשוט מבנים פורמלים חסרי משמעות מיוחדת. אולם, לדעת קורי[15] אין קריאה זו מבטאת באופן מהימן את תפיסתו של הילברט. לטעמו, גישתו של הילברט לגיאומטריה הייתה רווית משמעות ומבוססת אמפירית ולטענתו, תפיסה אמפירית זו נותרה קבועה במהלך השנים. ואולם, בשונה מן התפיסה הפורמאליסטית של האקסיומות שתתפתח מאוחר יותר, מטרת ה-*Grundlagen* היא לא הפורמליזם עצמו כי אם שימוש בצלילות הלוגית במטרה לראות בבירור אילו משפטים נובעים מאילו הנחות, האם ההנחות בלתי תלויות, אילו הנחות נדרשות על מנת לגזור את כל מבנה הידע של המדע המדובר וכן לדעת האם אימוצה של היפותזה חדשה יוביל לסתירה[16]. לדעת קורי שימוש בצלילות הלוגית אינו מקורי ומופיעה אצל הרץ בספרו מ-1894 The Principles of Mechanics Presented in a New Form, שם הוא סבור כי שימוש באנאליזה אקסיומטית תסייע לפתור ולנקות סתירות בתיאוריות הפיסיקאליות.

> כאשר אנו חוקרים את יסודות המדע, אנו חייבים להגדיר מערכת אקסיומות המכילה מספר מדויק ושלם של התיאורי היחסים המתקיימים בין הרעיונות היסודיים של המדע. אקסיומות אלה הם באותו הזמן ההגדרות של הרעיונות היסודיים,

---

[13] Eternal Truth, pp.6

[14] Born M, “Hilbert und die Physik.” *Die Naturwissenschaften* 10, 88-93.

[15] Corry L., Eternal Truth, pp.5-6

[16] Eternal Truth pp.7, 13.

ושום טענה בתחום מדע זה שאת יסודותיו אנו בודקים אינו מוחזק כאמיתי אלא אם אפשר לגזור אותו מאקסיומות אלה באמצעות מספר סופי של צעדים לוגים[17].

מערכת האקסיומות הגיאומטריות של הילברט מפורמלת באמצעות שלושה אובייקטים בלתי מוגדרים: ה"נקודה", ה"קו" וה"מישור" המקיימים יחסים הדדים. האקסיומות מחולקות לחמש קבוצות: שכיחות, סדר, התאמה, מקבילים ורצף. אולם אין בהם עצמם משמעות. לדעת קורי אלה מבטאות ביטוי של האינטואיציה המרחבית כאשר כל סוג של אקסיומות מבטאת אופן שהאינטואיציה מתגלמת[18]. ניתוח האקסיומות של הגיאומטריה בו השתמש הילברט ב-*Grundlagen* התבסס על ארבע דרישות: שלמות, עקביות, אי תלות ופשטות[19]. השלמות והפשטות הן שמגדירות את ה"עיגול הקטן" שממנו יוצאת המתמטיקה, העקביות ואי התלות הן המאפשרות לנו לצאת אל "העולם הגדול". בשונה מפרגה שסבר כי תכונות האקסיומות (כמו עקביות) מעידות על אמיתות האקסיומה, הילברט "נהנה" מהרעיון שניתן לבנות מערכות עקביות גם אם אינן "אמיתיות". אולם, הילברט עצמו נותר "שמרן" ולא נטה "לפנטז", והגדרת מערכות האקסיומות המופשטות והאנאליזה האקסיומטית נועדו עבור מתמטיקה קונקרטית. אותו משחק תיאורטי בהנחות מתמטיות לא נועד על מנת לשחק כי אם לאפשר לנו לבחון את גבול התיאוריה[20]. מערכת אקסיומות זו יכולה להיות מיושמת עבור כל מערכת ארביטררית אך כאמור, הוא לא נטה להתפרע ומערכות האקסיומות באו להרחיב ולשפר את המתמטיקות הבסיסיות. עם הזמן *השלמות והפשטות* נהיו פחות רלוונטיות ובסופו של דבר התעניין יותר *בעקביות ואי התלות.* דבר זה יכול להסביר תפיסתו את הבניין המדעי אותה ניתן לסכם באופן הבא: במתמטיקה שלא כמו בבניין רגיל לא צריך לבנות את היסודות קודם שבונים את הבניין. קופצים מהר מן הבסיס לקומות העליונות ורק אם יש חריקות חוזרים לבנות את ההגדרות[21]. תפיסה זו דומה להפליא לזו של ארכימדס אשר אומר שאנו בונים את המבנה בצורה לא לגיטימית ואח"כ מבססים אותו.

את האקסיומות שלו הוא כותב באופן הבא:

1.1 For any two points A,B, there is always a straight line a associated with both of the two points A,B.

$\forall A \forall B\left[A \neq B \rightarrow \exists a\left[\zeta(A,a) \wedge \zeta(B,a)\right]\right]$

($\zeta(A,a)$ should be read as ‘A lies on a’)

לכאורה הילברט מספק ביטוי פורמאלי לחלוטין – מדע טהור, אולם אין באפשרותנו להבין אותו כל עוד לא סיפק את ההערה בסוגריים. הערת סוגריים זו הוא מביא לאורך כל האקסיומות מה שמדגיש כי אין בכוחנו להבין גיאומטריה טהורה זו בלי אותה אינטואיציה ראשונית, אותה התבוננות הנשענת על השימוש במושג כמו

---

[17] Hilbert D, “Mathematical Problems”, *Bulletin AMS* 8, 447.
[18] “The Empiricist Roots of Hilbert’s Axiomatic Method”, pp.14
[19] Eternal Truth, pp.10.
[20] Eternal Truth, pp.10,17
[21] From quotation in Eternal Truth, pp.11

'נח', 'ליד' או 'בין'. השאלה אם כן, האם הצליח הילברט באמצעות אקסיומטיזציה זו להפוך את הגיאומטריה למדע מתמטי טהור, אני אישית סבור שלא ועל סמך דבריו נגלה כי הוא מכיר בתלות זו, באותה אינטואיציה חללית העגונה כה חזק בפילוסופיה הקאנטיאנית. אף כי הפכנו את התפיסות החלליות לסמלים הרי:

> אף על פי כן המקור [של הידע הגיאומטרי] הוא בניסיון. האקסיומות הן, כפי שהרץ היה אומר, תמונות וסמלים של שכלנו, כאלה שמה שנובע מן התמונות הן שוב תמונות של מה שנובע, כלומר, מה שאנו יכולים להסיק לוגית מתמונות אלה הוא בלבד אפשרי בטבע.[22]

מה שמחזק עוד יותר את ההפרדה שבין השלמות והפשטות ובין העקביות ואי התלות , בסופו של דבר הילברט מתחיל מן העולם ומעוניין לחזור אל העולם ולכן הוא מבקש כי האקסיומטיזציה תסייע לו להרחיב את "העולם הגדול". הילברט לא קיבל את העמדה כי ניתן לצמצם את המתמטיקה למשחק פורמלי בסמלים חסרי משמעות, הוא אף פעם לא שוכח כי מקור המתמטיקה הוא בניסיון ובאינטואיציה[23].

---

[22] Hilbert, D, *Die Grundlagen der Geometrie*, SUB Göttingen, Cod Ms. D. Hilbert 541. 10

[23] Eternal Truth, pp.17.