עבודה בקורס תולדות המתמטיקה:

ברהמהגופטה ब्रह्मगुप्त (598-665)

חייו, ה-Brahma-Sphuta-Siddhanta , וה-Bhâvanâ

מגישים :
מתן צור   ת.ז 017903907
אפי קניגסברג 036140234

הקדמה

מאז ומעולם הייתה התרבות ההודית אחת התרבויות העשירות בעולם. בתקופות ובתחומים מסוימים אף הייתה המהמתקדמות בעולם. כך היה ב"תקופה הקלאסית" של המתמטיקה ההודית אשר החלה במאה ה-6 לספירה ונסתיימה במאה ה-12. בתקופה זו, המתמטיקה נראתה לרוב ככלי חישובי לחיזוי מיקומי גרמי השמים. חיזוי זה היה חיוני לצורך קביעת מועדי החגים ולצורך קביעת תחזיות אסטרולוגיות.

במאה ה-6 לספירה פורסומו כתביו של אריהבטה (Aryabhata), אשר סיכמו את עבודותיהם של המתמטיקאים הג'יינים ופתחו עידן חדש באסטרונומיה והמתמטיקה ההודית. במסגרת חקירתו את ליקוי החמה והלבנה ובהתבססו על הידע היווני שהיה ברשותו, פיתח אריהבטה את הטריגונומטריה ושיטות לפתרון משוואות דיופאנטיות. אריהבטה עבד במרכז לחקר אסטרונומיה ומתמטיקה בעיר Kusumapura. באותה תקופה פעל מרכז מחקר חשוב נוסף בעיר אוג'יין (Ujjain). בין המתמטיקאים שפעלו שם: במאה ה-6, Varahamihira, אשר תרם תרומה משמעותית לאסטרונומיה והטריגונומטריה, ובמאה ה-7, ברהמהגופטה (Brahmagupta 598-665) אשר בו בחרנו להתמקד בעבודה זו .

המתמטיקה ההודית של התקופה הקלאסית הקדימה בכמה תחומים את המתמטיקה המערבית. חלק מהתגליות ההודיות תורגמו לשפות מערביות אך רק מקצת המתמטיקאים ההודים זכו להכרה מערבית. דוגמא לכך היא עבודתו של ברהמהגופטה על פתרונות שלמים למשוואת פל, שתפורט בגוף העבודה. אלף שנה לאחר מכן העסיקה משוואה זו את טובי המתמטיקאים. ניתן לשער שלו פרמה, אוילר ולג'רנג' היו מחזיקים בכתביו של ברהמהגופטה, הם היו נעזרים בהם רבות. מסקנותיהם דומות ולעיתים זהות לאלו של ברהמהגופטה.

תחושתינו היא כי המדע ההודי לא זכה להכרה ראויה. בעבודתינו ננסה לשנות זאת ולו במעט.

בעבודתינו נסקור את חייו, הרקע לתגליותיו והשפעותיהם. נסקור את החידושים המתמטיים העיקריים המופיעים בספרו החשוב ביותר, ה- BrahmaSphutaSiddhanta. לאחר מכן, ננתח את הלמה של ברהמהגופטה (Bhâvanâ) וחלק מיישומיה במטרה לשפוך מעט אור על גישתו של ברהמהגופטה להתמודדות עם בעיות מתמטיות.

חיי ברהמהגופטה

מתמטיקאי ואסטרונום הינדי אשר מרכז עבודתו בעיר אוג'ין, השוכנת במחוז גווליאור שבמרכז תת היבשת ההודית. ככל הנראה[1] מקורו בעיר בהילמלה (Bhillamala) - בירת שושלת גוג'רה (העיר המודרנית "בהינמל" שברג'סטאן). בבגרותו, הפך לאסטרונום החצר של המלך Vyaghramukha ולראש מצפה הכוכבים של אוג'ין שהיה באותה תקופה מרכז המתמטיקה החשוב בהודו.

כשמלאו לו שלושים, פרסם ברהמהגופטה את עבודתו החשובה ביותר ה-BrahmaSphutaSiddhanta ("המערכת המתוקנת של ברהמה" או בקיצור, BSS) העוסקת בעיקר באסטרונומיה. העבודה מורכבת מ-21 פרקים, מתוכם ארבעה מוקדשים למתמטיקה טהורה. בהמשך העבודה נתאר את החידושים המתמטיים העיקריים המופיעים ב-BSS. בשנת 665 לספירה, פרסם ברהמהגופטה את ה-Khandakhadyaka (KK) המכילה בעיקר נוסחאות לחישובים אסטרונומיים. רוב כתבי ברהמהגופטה עסקו באסטרונומיה. על פי הידוע הוא היה החוקר ההודי הראשון שהשתמש באלגברה לצורך המחקר האסטרונומי. בתחום זה, הוא חקר את ליקויי החמה והלבנה, ותנועת הכוכבים. ברהמהגופטה טעה לחשוב שכדור הארץ עומד סטאטי במרכז היקום, אך העריך באופן מרשים (לא לראשונה) את היקף כדור הארץ כ-36,000 ק"מ (טעות של כ-10% בלבד). על כוח הכובד כתב: "גופים נופלים לכיוון הארץ משום שטבע כדור הארץ למשוך גופים, כשם שטבע המים לזרום"[2].

מוריו והשכלתו של ברהמהגופטה אינם ידועים כיום, אך ברור שהיה בקיא בחמש הסידהנטס (*Siddhāntas*). עבודות אסטרונומיות אלו הן סיכומים ותיקונים לעבודות קדומות שנערכו על ידי Varahamihira (505-587) שהעלה את המרכז האסטרונומי באוג'ין למעמדו הרם. ברהמהגופטה הושפע ממנו, כמו גם ממתמטיקאים ואסטרונומים הודים נוספים. ביניהם, הקדום ביותר המוכר כיום הוא Aryabhata (476-550), שהושפע מהמתמטיקה היוונית, וקבע את תחילת היממה לחצות . בכתביו מתח ברהמהגופטה ביקורות חריפה על קודמיו, במיוחד על האחרון.

ברהמהגופטה השפיע בראש ובראשונה על המתמטיקאים בני ארצו. בין פרשניו ההודיים נמנים Prthudakasvami אשר פירש את ה-BSS בחוקרו משוואות ריבועיות, והמתמטיקאי הנודע BhâskaraII (1114-1185) אשר דימה את ברהמהגופטה ל"אבן החן של טבעת המתמטיקאים".
כתבי ברהמהגופטה הופצו לסין עם הפצת הבודהיזם ובעקבות זאת השיטה העשרונית וסימוניה אומצו על ידי המלומדים הסינים. עם זאת השפעתו הרחבה והמשמעותית של ברהמהגופטה על המתמטיקה היא תודות לתרגום כתביו מסנסקריט שפתו לערבית. ב-770 לספירה הזמין מייסד בגדאד, המלך חליף אבאסיד אלמנסור, מלומד מאוג'ין על מנת לרכוש את שיטות האריתמטיקה האסטרונומית ההינדית. המלומד הביא איתו את ה-BSS של ברהמהגופטה ולבקשת המלך היא תורגמה לערבית תחת השם "סינד הינד"[3]. ידוע כי אלחווריזמי שנהוג לתארו כ"ממציא האלגברה" הושפע מתרגום זה. תרגומים לכתביו של אלחווריזמי ללטינית הופיעו בספרד במאה ה-11 והפיצו את שיטת המספור ושיטות החישוב ההודיות גם לאירופה הנוצרית.

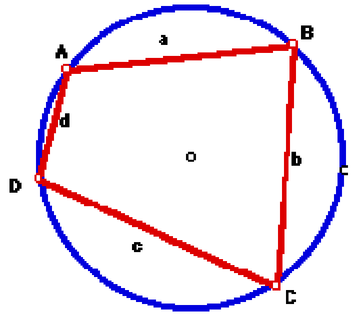
Brahma Sphuta Siddhanta

עבודה זו, שהיא כנראה תיקון של כתב קדום של מתמטיקאי אחר, היא עבודתו החשובה היותר של ברהמהגופטה הן בפן המדעי והן בפן ההיסטורי. חלק מהתגליות המתמטיות המופיעות בה לראשונה הותירו חותם גדול על ההיסטוריה של המתמטיקה. בארבעת הפרקים המתמטיים שבעבודה הניח ברהמהגופטה את היסודות לשני התחומים המרכזיים במתמטיקה ההינדית: ה- pati-ganita (אלגוריתמים) וה--bija ganita(משוואות)[4] המקבילים באופן גס לאריתמטיקה ולאלגברה. אחד הפרקים האלה נפתח בהגדרת ה-ganaca, אדם המצוי בחשבון וכשיר לעיסוק באסטורנומיה. עליו לדעת את "פעולות החיבור, שאר 20 הלוגיסיקות (פעולות) ו-8 המדידות כולל מדידה בעזרת צל"[5]. אם כן, המתמטיקה על פי ברהמהגופטה משרתת את האסטרונומיה.
ב-BSS חולל ברהמהגופטה מהפכה בעולם המספרים. **האפס** הוגדר כתוצאה שמתקבלת מחיסור מספר מעצמו. קודם לכן, תוצאה זו נחשבה טריוויאלית ולא הורגש צורך בהגדרתה. ברהמהגופטה החל להתייחס אליה כניתנת לכימות. הוא הגדיר את הפעולות האריתמטיות על האפס, המספרים השליליים ("חובה") באופן שהשתלב בהגדרות הקודמות על המספרים החיוביים ("הון"), לעיתים באופן המקובל בימינו:
"מכפלה או חילוק של שני חובות היא הון.....חוב המופחת מאפס הוא הון".
לעיתים הפעולות הוגדרו באופן שונה מהמקובל בימינו: "חוב או הון המחולקים באפס הם שבר עם אפס במכנה......אפס המחולק באפס הוא אפס".
בהגדרות אלו, הרחיב ברהמהגופטה את האריתמטיקה ואת המושג "מספר". השלכותיה של תגלית זו עצומות וכבר בחיי ברהמהגופטה היא הפכה לקונבנציה מתמטית בהודו. חשוב להדגיש כי עוד קודם לפרסום ה-BSS רווחה בהודו שיטת המספור המבוססת על מיקום הספרה. השיטה הכילה 9 ספרות וסימון נוסף ל-"מקום שמור" לדוגמא, לסימון הערך של 503 רשמו חמש, מקום ריק, ושלוש. מקום ריק זה שסומן בהמשך כנקודה או עיגול קטן נקרא sunya ("ריק"). מאוחר יותר תורגם השם לערבית ל-"סיפר" ומכאן שובש בהדרגה ל-zero הלטיני. הגדרותיו של ברהמהגופטה אפשרו את צירוף ה-sunya לשאר המספרים וקישור בין האריתמטיקה ושיטת הסימון העשרונית. בעזרת כך לדוגמא, תיאר ברהמהגופטה לראשונה שיטות אריתמטיות להכפלת מספרים רב ספרתיים. האפס השתלב בשיטה העשרונית באופן נרחב עוד במאה השביעית[6] ובמאה השמינית, עם תרגום ה-BSS לערבית, הופץ מערבה.
פרק חשוב ב-BSS עוסק במשוואות ללא פתרון ישיר (**indeterminate equation**), ומשוואות דיופאנטיות (על שם המתמטיקאי היווני דיופאנטוס שחי במאה ה-3 לספירה), בהן המקדמים והשורשים הם מספרים שלמים. ברהמהגופטה פיתח שיטה[7] לפיתרון משוואות דיופאנטיות מהצורה $ax+c=by$.
הישגו המרשים בתחום זה היה במציאת פתרונות למשוואות מהצורה $Ax^2+q=y^2$ כש-A חיובי ו- x,y לא ידועים. בפרט, ברהמהגופטה עסק בפתרון המשוואה $Ax^2+1=y^2$. המשוואה הזו נקראת כיום **משוואת פל** (Pell's equation) תוך עשיית עוול מסוים לברהמהגופטה. היא העסיקה גם את המתמטיקאים ההודים בהסקרה השני ונארינה אך פתרונה לא היה ידוע במערב עד המאה ה-17, אז פרמה הציב אותה כאתגר בפני חבריו באירופה ואנגליה[8]. היא נפתרה באופן דומה לפתרונות ההודים שהיו קדומים במאות רבות של שנים. נתמקד בהישג זה ובלמה של ברהמהגופטה, שהיא חלק משמעותי בו, בהמשך העבודה.

ב-BSS פורסמה גם "זהות ברהמהגופטה" הנכונה עבור מספרים שלמים אך גם מעל כל חוג קומטטיבי אחר. היא קובעת כי מכפלה של שני מספרים אשר שניהם ריבועיים היא בעצמה סכום של שני ריבועים:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

האלגברה של ברהמהגופטה עסקה בעיקרה בפיתרון בעיות ממשיות, יום יומיות, אחת מהן היא:
"שני נזירים גרו בראש צוק בגובה 100 יוג'נס(כ-9 ק"מ), אשר בסיסו מרוחק 200 יוג'נס מכפר שכן. נזיר אחד ירד למרגלות הצוק והלך בקו ישר לכפר, ואילו השני התעופף לגובה מסוים ואז עף בקו ישר אל הכפר. המרחק ששניהם עברו שווה. לאיזה גובה עלה הנזיר המעופף?"[9].



בתחום הגיאומטריה ברהמהגופטה מצא נוסחא לחישוב שיטחו ואורך אלכסוניו של מרובע אשר קודקודיו נמצאים על אותו מעגל (אף שלא ציין בפירוש שהנוסחא מתאימה למרובעים כאלה בלבד). הוא מצא כי שטח המרובע שצלעותיו a,b,c,d שווה $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ כאשר $s=\frac{a+b+c+d}{2}$.
ברהמהגופטה לא פירט את ההוכחה למשפט זה, אך השתמש בו על מנת למצוא מרובעים שצלעותיהם, אלכסוניהם ושטחיהם רציונלים[10]. אחד מהם היה מרובע שקודקודיו נמצאים על מעגל וצלעותיו באורך 52,25,39,60. הוא ניסח משפט ליצירת מרובעים כאלה (שאלכסוניהם ניצבים זה לזה ונקראים כיום "מרובעי ברהמהגופטה"):
"אם a,b,c ו-a,b',c' (שלמים או רציונליים) הם אורכי צלעות של שני משולשים ישרי זווית כאשר c,c' הם היתרים, אז ac', bc', ca, cb' הם אורכי צלעותיו של מרובע ברהמגופטה".

הלמה של ברהמגופטה

בספרו BrahmaSphutaSiddhanta ברהמהגופטה מנסח למה שבאמצעותה ניתן להגיע לפתרונות חלקיים של המשוואה $Dx^2+m=y^2$ כאשר D ו-m שלמים. (ברהמהגופטה חיפש שורשים x ו-y שלמים או רציונאליים למשוואה). ברהמהגופטה ציין שמי שפותר את המשוואות במקרה שבו m=1 ו-D=83 ו-D=92 תוך שנה הינו מתימטקאי אמיתי (כמובן שהכוונה למצוא שורשים שלמים).
כאלף שנה אחר-כך העסיקו משוואות אלו מתמטיקאים רבים כגון פרמה, אוילר ולהגראנג', שחלקם הגיעו למסקנות דומות ולעיתים אף זהות לאלו של ברהמהגופטה.
הלמה ויישומיה בידי ברהמהגופטה מדהימים באמצעים הפשוטים שבעזרתם ניתן לפתור משוואות סבוכות. לפי Amartya Kumar Dutta[11] המייחדים את הלמה הם: השימוש ברעיונות בסיסיים של אלגברה מודרנית (יפורט בהמשך); המקוריות והתחכום בהתמודדות עם בעיה אלגברית והטכניקה שהקדימה את זמנה.
ראשית נציג את הלמה בשפתו של ברהמהגופטה ולאחר מכן נביא הוכחה מאוחרת יותר בשפה מתמטית מודרנית. נראה כיצד ברהמגופטה מיישם את הלמה בהתמודדותו עם המשוואות.
הלמה כפי שנוסחה ב-BrahmaSphutaSiddhanta[12]:

"הריבוע של מספר שרירותי המוכפל ב-gunaka (D) ומחובר או מחוסר ממספר, (m)ista, חלץ את השורש.**התקדם פעמיים** . המכפלה של השורשים הראשונים כפול ה-gunaka יחד עם המכפלה של השורשים השניים ייתן שורש שני (טרי)..סכום המכפלות בהצלבה הוא שורש ראשון (טרי). התוסף המתאים יהיה המכפלה של התוספים הקודמים".

פרוש החוק איננו פשוט מכיוון שלמילה dvidhâ (פעמיים) ישנן שתי השלכות: **הראשונה**, הכוונה שהפעולה המוקדמת של מציאת שורשים נעשית על שני מספרים שרירותיים עם שתי תוספות שרירותיות ועם התוצאות האלה נעשים השלבים הבאים. בשפה מתמטית מודרנית:
נניח a',b' ו- a;b מקיימים $Da'^2+m'=b'^2$, $Da^2+m=b^2$ בהתאמה אזי
$x=ab'\pm a'b, y=bb'\pm Daa'$ מקיימים $Dx^2+mm'=y^2$.

השניה,הפעולה המוקדמת נעשית עם מספר שרירותי יחיד ותוסף יחיד. כלומר, הפעולה הבאה היא לחלץ פעם נוספת את השורש. בשפה מתמטית מודרנית: נניח,
a,b מקיימים $Da^2+m=b^2$ אזי $x=2ab;y=b^2+Da^2$ מקיימים $Dx^2+m^2=y^2$

ברור שהמקרה השני הינו מקרה פרטי של הראשון. תוצאה זו כונתה התוספת של ברהמהגופטה.
התוצאות הנ"ל נקראו ע"י אלגבראיסטים הודים במושג:Bhâvanâ. (מודגם או מוכח כלומר, תיאוריה או למה). משמעות נוספת למילה היא יצירה או צירוף..כאשר Bhâvanâ.נעשה עם שני תוספים זהים אזי מכונה TulyaBhâvanâ (יצירה של שווים) . וכאשר שני התוספים שונים אזי היא מכונה AtulyaBhâvanâ (יצירה של לא שווים).

הוכחת הלמה: בשנת 1580 בפרשנות לכתבו Bijaganita של BhâskaraII ניתנת ההוכחה הבאה:
נניח a',b' ו $a;b$;מקיימים

(1) $Da^2+m=b^2$

(2) $Da'^2+m'=b'^2$

נכפיל את(1) ב-b'^2 ונקבל $Da^2b'^2+m\,b'^2=b^2\,b'^2$

לפי (2) נציב , $Da^2b'^2+m(Da'^2+m')=b^2\,b'^2$

כלומר, $Da^2b'^2+Dma'^2+mm'=b^2b'^2$ ולפי

(1) נחלץ את m ונציב $Da^2b'^2+Da'^2(b^2-Da^2)+mm'=b^2b'^2$

כלומר $D(a^2b'^2+a'^2b^2)+mm'=b^2b'^2+D^2a^2a'^2$

נוסיף $\pm 2aba'b'$ לשני הצדדים ונקבל $D(ab'\pm a'b)^2+mm'=(bb'\pm Daa')^2$.

מסקנה מיידית מהלמה של ברהמהגוטה הנה שאם ידוע פתרון שלם יחיד שאיננו טריוויאלי של המשוואה $Dx^2+1=y^2$ אזי ניתן למצוא כמות אין סופית של פתרונות שלמים באופן הבא:
עבור D נתון נרשום (a,b,m) אם מתקיים $Da^2+m=b^2$.
באמצעות הלמה נגדיר את הפעולה "_" ליצירת שלשה סדורה נוספת:
$(a,b,m)\_(a',b',m')=(ab'+a'b,bb'+Daa',mm')$.[13]
נניח p_0 , q_0 מקיימים $Dp_0^{\ 2}+1=q_0^{\ 2}$ ואינם פתרון טריוויאלי.
לכל i יש שלשה שונה (שורש שונה למשוואה):
$(p_0,q_0,1)\_(p_i,q_i,1)=(p_{i+1},q_{i+1},1)$
קל לראות שהפתרונות גדלים.

באותו אופן, בעזרת שורש שלם יחיד של המשוואה $Dx^2+1=y^2$ ובעזרת שורש שלם יחיד של המשוואה $Dx^2+m=y^2$ ניתן למצוא מספר אין סופי של פתרונות שלמים למשוואה האחרונה. זאת ציין[14] ברהמהגופטה (BSS, שורה 66)

"משני שורשים (ריבועיים) עם כל תוספת שהיא(m), ע"י הקומבינציה עם השורשים של תוספת היחידה, (ניתן למצוא) שורשים ראשוניים ושניים נוספים (של המשוואה) עם התוסף או החסר הנתון (m)".

יישומים של הלמה ע"י ברהמהגופטה

פתרון רציונאלי

כפי שציינו BhâskaraII(1150)-ו Sripati (1030) משתמע מה-BSS שבאמצעות הלמה, ברהמהגופטה מוצא שיטה למצוא כל מספר של פתרונות רציונאליים למשוואה $Dx^2+1=y^2$.

מפרשנותם נובע כי, ראשית יש למצוא פתרון רציונאלי אחד לא טריביאלי. נבחר שני מספרים שלמים חיוביים p,q שמקיימים : $q^2>Dp^2$.

נגדיר $m=q^2-Dp^2$. ברור שמתקיים: $Dp^2+m=q^2$.

נפעיל את הלמה על אותם שורשים: $(p,q,m)\_(p,q,m)=(2pq,Dp^2+q^2,m^2)$.

כלומר מתקיים $(2pq)^2+m^2=(Dp^2+q^2)$

נגדיר $x=\frac{2pq}{m}$ $y=\frac{Dp^2+q^2}{m}$ ברור שמתקיים $Dx^2+1=y^2$

טכניקות למציאת שורשים שלמים

בנוסף, ברהמהגופטה פיתח טכניקות למציאת שורשים שלמים במקרים מסוימים. לדוגמא על מנת למצוא שורשים למשוואה, $83x^2+1=y^2$, נשתמש במשוואת עזר מהצורה $Dx^2-2=y^2$. נניח p ו q שורשים שלמים של משוואת העזר.

עבור D הנ"ל מתקיים (p,q,-2) כלומר $Dp^2-2=q^2$ (i)

נשתמש בלמה ונקבל: $(p,q,-2)\_(p,q,-2)=(2pq,q^2+Dp^2,4)$

כלומר $D(2pq)^2+4=(q^2+Dp^2)^2$ $\Leftarrow$ $D(pq)^2+1=[(q^2+Dp^2)/2]^2$.

לפי (i) מתקיים $q^2+Dp^2=2+2q^2$

נציב ונקבל: $D(pq)^2+1=(1+q^2)^2$ (ii)

במקרה שלנו D=83 קל לראות שמתקיים (1,9,-2). כלומר p=1,q=9 מקיים את $83p^2-2=q^2$. ולפי (ii) (9,82,1) מתקיים כלומר p=9,q=82 מקיים $83p^2+1=q^2$.

באופן כללי, השיטה של ברהמהגופטה לפתרון שלם וחיובי של משוואות מהצורה $Dx^2+1=y^2$ היא יצירת משוואת עזר מהצורה $Da^2+m=b^2$ כאשר a ו-b שלמים חיוביים ו-$m=\pm1,\pm2,\pm4$. באמצעות משוואת עזר זו ניתן להשיג, כמו בדוגמא הנ"ל, את השורשים של המשוואה המקורית.

במקרה שבו $m=\pm4$ ברהמהגופטה מסביר כיצד ניתן למצוא את השורשים של המשוואה המקורית באמצעות השורשים של משוואת העזר. ניסוחו כדלקמן:

"במקרה של 4 מחובר (חיובי) הריבוע של השורש השני פחות 3 ואז נחצה (חלוקה בשתיים) ונכפיל בשורש השני יהיה השורש השני. הריבוע של השורש השני פחות היחידה ואז נחצה ונכפיל בשורש הראשון יהיה השורש הראשון"

בספרם, History of Hindu Mathematics,vol.I and II, בשנת Detta and Singh 1952 מפרשים זאת כך:

נניח מתקיים $Da^2+4=b^2$

נחלק ב-4 $$D(\frac{a}{2})^2+1=(\frac{b}{2})^2 \qquad (\text{ i })$$

נפעיל את הלמה על אותם שורשים (ii) $D(\frac{ab}{2})^2+1=(\frac{b^2+Da^2}{4})^2$

לפי (i) (iii) $D(\frac{ab}{2})^2+1=(\frac{b^2-2}{2})^2$

{נימוק: $\frac{b^2-2}{2}=(\frac{b^2+Da^2}{4})^2$ }

נפעיל את הלמה על: (i) ו- (iii) ונקבל $D\left[\left(\frac{a}{2}\right)\left(b^2-1\right)\right]^2+1=\left[\left(\frac{b}{2}\right)\left(b^2-3\right)\right]^2$

{*נימוק:* לפי הלמה **השורש הראשון** הוא:

$$x=a\left(\frac{b^2-2}{4}\right)+\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{ab}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{2}-1+\frac{b^2}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(b^2-1\right)$$

$$y=\left(\frac{b}{4}\right)\left(b^2-2\right)+Da\left(\frac{ab}{4}\right)=b\left[\frac{b^2+Da^2-2}{4}\right]$$

לפי משוואה (i)

$D(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2=\frac{b^2}{2}-1$ נציב ונקבל: $y=b\left(\frac{b^2}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{b}{2}\left(b^2-3\right)$

ולכן השורשים $y=\frac{b}{2}\left(b^2-3\right)$, $x=\frac{a}{2}\left(b^2-1\right)$ מקיימים את המשוואה $Dx^2+1=y^2$.

אם b זוגי אזי $x=\frac{ab}{2}, y=\frac{b^2-2}{2}$ הינם שורשים שלמים של המשוואה $Dx^2+1=y^2$ (לפי (iii)).

אם b אי זוגי אזי $y=\frac{b}{2}\left(b^2-3\right)$, $x=\frac{a}{2}\left(b^2-1\right)$ הינם שורשים שלמים של המשוואה.$Dx^2+1=y^2$.

במקרה ש m=-4 ברהמהגופטה טוען[15]:

"במקרה של 4 כשהוא מחוסר (כלומר שלילי)הריבוע של השני מחובר ב-3 וגם מחובר ב-1 , לחצות את המכפלה של הסכומים ולהחסיר ביחידה (בשפה אלגברית אם a,b הם השורשים אזי הכוונה היא ל- $\frac{\left(b^2+3\right)\left(b^2+2\right)}{2}+1$) האחרון מוכפל בסכום הראשון פחות היחידה הנו מהשורש השני; הקודם מוכפל במכפלה של השורשים הישנים יהיה השורש הראשון שמתאים לשורש השני.(כלומר $\frac{ab\left(b^2+3\right)\left(b^2+2\right)}{2}$) "

הפרוש של הפתרון כפי שניתן על ידי Datta and Singh הוא כדלהלן:

נניח מתקיים $Da^2-4=b^2 \leftarrow D(a/2)^2-1=(b/2)^2$ (i)

נפעיל את הלמה ונקבל $D\left(\frac{ab}{2}\right)^2+1=\left(\frac{b^2+Da^2}{4}\right)^2=\left(\frac{b^2+2}{2}\right)^2$ (ii)

נפעיל שנית את הלמה (על אותם שורשים) ונקבל $D\left[\frac{ab\left(b^2+2\right)}{2}\right]^2+1=\left(\frac{b^4+4b^2+2}{2}\right)^2$ (iii)

(נימוק:**השורש הראשון** לפי הלמה הוא:

$$x=ab\left(\frac{b^2+Da^2}{2}\right),$$

$y=\left(\frac{b^2+Da^2}{2}\right)^2+D\left(\frac{ab}{2}\right)^2$ ולפי (ii) $y=\frac{(b^2+2)^2}{2}-1=\frac{b^4+4b^2+2}{2}$)

נפעיל את הלמה על (ii) ו (iii) ונקבל :

$$D\left[\frac{ab\left(b^2+3\right)\left(b^2+1\right)}{2}\right]^2+1=\left\{\left(b^2+2\right)\left[\frac{\left(b^2+3\right)\left(b^2+1\right)}{2}-1\right]\right\}^2$$

(נימוק: לפי הלמה השורש הראשון הוא:

$$x=\frac{ab\left(b^4+4b^2+2\right)}{4}+\frac{ab\left(b^2+2\right)^2}{4}=\frac{ab}{2}\left[\frac{b^4+4b^2+2+\left(b^2+2\right)^2}{2}\right]$$

וקל לבדוק ש- $x=\frac{ab\left(b^2+3\right)\left(b^2+1\right)}{2}$

השורש השני לפי הלמה הוא:

$$y=\left(\frac{ab}{2}\right)^2\left(b^2+2\right)+\frac{\left(b^4+4b^2+2\right)\left(b^2+2\right)}{4}=\left(b^2+2\right)\left[D\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\frac{b^4+4b^2+2}{4}\right]$$

לפי (ii) :

$$D\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\frac{b^4+4b^2+2}{4}=\frac{b^4+4b^2+3}{2}-1=\frac{\left(b^2+3\right)\left(b^2+1\right)}{2}-1$$

ולכן $y=\left(b^2+2\right)\left[\frac{\left(b^2+3\right)\left(b^2+1\right)}{2}-1\right]$

כלומר קיבלנו ש: x,y המוגדרים הנ"ל מקיימים $Dx^2+1=y^2$.

כמו כן שני השורשים שלמים מכיוון שאם b זוגי קל לבדוק ש-x ו-y שלמים ואם b אי זוגי אזי b^2 אי זוגי ולכן $\frac{\left(b^2+3\right)\left(b^2+1\right)}{2}$ שלם.

מעניין לראות שאם נציב: p=ab ו $q=b^2+2$ נקבל:

$$x=\frac{p\left(q^2-1\right)}{2},\ y=\frac{q\left(q^2-3\right)}{2}$$

זוהי צורת פתרונו של אוילר למשוואה.
הטכניקה שברהמהגופטה פיתח מאפשרת לפתור בצורה פשוטה ביותר משוואות מסובכות.
אולם, נותרה הבעיה כיצד לייצר משוואות עזר כאלה. ברהמהגופטה לא פתר בעיה זו בצורה שיטתית אלא הסתמך על ניסיון וטעייה..BhâskaraII פיתח שיטות שעזרו למצוא משוואות עזר כאלה.

סיכום

בכתיבת עבודה זו נתקלנו במספר אתגרים. קשה היה לשים את היד על מקורות ישירים מהתקופה. מקורות החומר לעיתים היו דלילים וסותרים עקב פערי המקום והזמן. הקושי העיקרי היה להבין מתוכם אלו מהתגליות ניתן ליחס לברהמהגופטה ואלו לקודמיו ולפרשניו. לדוגמא ה-BSS ע"פ שמו ("המערכת המתוקנת של ברהמה") היא פרשנות לכתב קדום יותר. למרות שכתבו של ברהמהגופטה הוא הכתב הראשון שמוכר לנו המגדיר פעולות על האפס, לא ברור אם הדבר נעשה גם לפניו.
אחד היעדים בניתוח טקסט מתמטי היסטורי הוא ללמוד מתוכם על החשיבה המתמטית של הכותב ושל תקופתו. פירוש הטקסט באמצעות הכלים המתמטיים המודרניים מקשה על השגת מטרה זו. למרות זאת, אנו מקווים שהצלחנו לשפוך אור על היצירתיות והמקוריות של ברהמהגופטה ובכך חשפנו מעט את דפוסי החשיבה שלו.

בבליוגרפיה

[1] http://www.math.sfu.ca/histmath/India/7thCenturyAD/brahmagupta.html
[2] Ancient India – Astronomy, http://www.crystalinks.com/indiastronomy.html
[3] Ancient India's Contribution to Mathematics
http://www.hindutva.org/sudheer_birodkar/india_contribution/maths.html
[4] "Brahmagupta." Encyclopædia Britannica from Encyclopædia Britannica Premium Service.
http://www.britannica.com/eb/article-9016154
[5] History of Mathematics / David E Smith
[6] Filliozat, Pierre-Sylvain. “Making Something Out of Nothing.” Unesco Courier Nov. 1993: 30(4).
[7] P K Majumdar, A rationale of Brahmagupta's method of solving ax + c = by, Indian J. Hist. Sci. 16 (2) (1981), 111-117.
[8] Pell's equation, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pell.html
[9] Ramesh Gangolli, Asian Contributions to Mathematics, PORTLAND PUBLIC SCHOOLS GEOCULTURAL BASELINE ESSAY SERIES
[10] W S Anglin , Mathematics : A concise history and philosophy, Springer ,123-125
[11] Mathematics in Ancient India; Brahmagupta's Lemma: The Samasabhavana; [11]Amartya Kumar Dutta
[12] A Critical Study of Brahmagupta and his Works;Svami Satya Prakash Sarasvati; Vijay Kumar ;India 1986.
[13] Mathematics in Ancient India; Brahmagupta's Lemma: The Samasabhavana; [13]Amartya Kumar Dutta
[14] A Critical Study of Brahmagupta and his Works;Svami Satya Prakash Sarasvati; Vijay Kumar ;India 1986.
[15] A Critical Study of Brahmagupta and his Works;Svami Satya Prakash Sarasvati; Vijay Kumar ;India 1986.