# קבוצה סדורה חלקית אוניברסלית

**הרחבת סדר חלקי**. תהי $\langle A, <\rangle$ קבוצה סדורה חלקית, ויהיו $u, v \in A$ איברים שאינם ניתנים להשוואה בסדר החלקי $<$. קיים סדר חלקי $<'$ על $A$ שהוא המשכה של $<$ וכך ש- $u <' v$.

**המשכת סדר חלקי לסדר מלא**. כל סדר חלקי $<$ על קבוצה סופית $A$ ניתן להמשכה לסדר מלא $<'$ על $A$, ואם $u, v \in A$ אינם ניתנים להשוואה בסדר החלקי $<$ אז אפשר לבחור את $<'$ כך ש- $u <' v$.

(משפט זה נכון גם לקבוצה $A$ אינסופית אבל הוכחתו למקרה זה קשה יותר, ובדרך כלל היא מסתמכת על נכונות המשפט לקבוצות סופיות).

**פונקציה מונוטונית**. פונקציה $F$ מקבוצה סדורה חלקית $\langle A, <\rangle$ לקבוצה סדורה חלקית $\langle B, <\rangle$ נקראת מונוטונית אם לכל $u, v \in A$ אם $u < v$ אז $F(u) \le F(v)$. פונקציה מונוטונית מ-$A$ לקבוצה $\{0,1\}$ נקראת **פונקצית הפרדה**.

**מסקנות**. לכל קבוצה סדורה $A$ ואיבר $u$ של $A$ קיימת פונקצית הפרדה $H$ על $A$ כך ש- $H(u) = 1$ ולכל $v < u$ $H(v) = 0$. לכן, לאור מה שהוכחנו, תהי $\langle A, <\rangle$ קבוצה סדורה חלקית, ויהיו $u, v \in A$ איברים שאינם ניתנים להשוואה בסדר החלקי $<$. אז קיימת פונקצית הפרדה $H$ על $A$ כך ש- $H(u) = 0$ ו- $H(v) = 1$.

**שדה של קבוצות**. תהי $X$ קבוצה לא ריקה. שדה של קבוצות חלקיות ל-$X$ הוא קבוצה $W$ של קבוצות חלקיות ל-$X$ כך ש- $\emptyset \in W$ ולכל $Y, Z \in W$ גם $Y \cup Z, Y \cap Z, X \setminus Y \in W$. את $X \setminus Y$ אנו מסמנים גם ב-$\overline{Y}$ וקוראים לקבוצה זאת המשלים של $Y$. שדה $W$ של קבוצות נקרא **חסר אטומים** אם לכל $\emptyset \ne Y \in W$ קיים $Z \in W$ כך ש- $\emptyset \ne Z \subsetneq Y$.

**שיכון מרווח**. תהי $F$ פונקציה מונוטונית מקבוצה סופית $A$ סדורה חלקית לשדה $B$ של קבוצות. $F$ נקראת שיכון מרווח של $A$ ב-$B$ אם לכל פונקצית הפרדה $H$ על $A$ הקבוצה $F^*(H) = \bigcap_{x\in A} F(x)^{H(x)}$ אינה ריקה, היכן שלכל $D \in B$ $D^1 = D$ ו- $D^0 = \overline{D}$. הקבוצות $F^*(H)$ נקראות **האטומים של $F$**. אם $H$ ו-$J$ פונקציות הפרדה שונות אז האטומים המתאימים $F^*(H)$ ו- $F^*(J)$ זרים כי קיים, ללא הגבלת הכלליות, איבר $u \in A$ כך ש- $H(u) = 1$ ו- $J(u) = 0$, ואז $F^*(H) \subseteq F(u)$ ו- $F^*(J) \subseteq \overline{F(u)}$.

**שיכון מרווח הוא שיכון**. יהי $F$ שיכון מרווח מ-$A$ ל-$B$. מכיוון ש-$F$ פונקציה מונוטונית די להוכיח שעבור $u, v \in A$ אם $F(u) \subseteq F(v)$ אז גם $u \le v$, כי זה גורר גם את החד חד ערכיות של $F$. נניח כי $u \not\le v$ אז, לפי מה שראינו לעיל קימת פונקצית הפרדה $H$ כך ש- $H(v) = 0$ ו- $H(u) = 1$. עבור $H$ זאת $F^*(H)$ חלקית ל-$F(u)$ וזרה ל- $F(v)$. מכיוון ש-$F^*(H)$ אינה ריקה $F(u)$ אינה חלקית ל-$F(v)$, בניגוד להנחתנו.

**המשכת שיכון מרווח**. תהי $A \cup \{w\}$ קבוצה סדורה חלקית סופית, $w \notin A$. יהי $F$ שיכון מרווח של $A$ בשדה $B$ חסר אטומים של קבוצות חלקיות ל-$X$. אז אפשר להמשיך את $F$ לשיכון מרווח $G$ של $A \cup \{w\}$ ב-$B$.

**הוכחה**. מכיוון ש-$B$ היא חסרת אטומים אז קיים, לכל $\emptyset \ne T \in B$ ב-$B$ $T^* \in B$ כך ש- $\emptyset \ne T^* \subsetneq T$. כאשר נדבר על אחודים וחיתוכים של איברי $B$ אנו קובעים שהאיחוד הריק הוא $\emptyset$ והחיתוך הריק הוא $X$. נסמן ב-$Q$ את קבוצת כל האטומים $F^*(H)$ עבור פונקציות ההפרדה $H$ המקיימות $H(x) = 0$ עבור $x < w$ ו- $H(x) = 1$ עבור $x > w$. ברור שיש לפחות $H$ אחת כזאת הנתונה ע"י $H(x) = 0$ לכל $x < w$ ו- $H(x) = 1$ לכל $x \in A$ אחר. ל- $T = F^*(H) \in Q$ ו- $x < w$ קיים $H(x) = 0$ ולכן $T \subseteq \overline{F(x)}$ ולכן $T$ זר ל-$F(x)$.

נגדיר את $G$ על $A \cup \{w\}$ ע"י $G(x) = F(x)$ לכל $x \in A$ ו- $G(w) = \bigcup_{x<w} F(x) \cup \bigcup_{T\in Q} T^*$.

כפי שראינו, אם $S \in Q$ אז $S$ זר לכל $F(x)$ עם $x < w$, וכמובן שהוא זר לכל $S \ne T \in Q$ כי כל $T$ כזה מתקבל מפונקצית הפרדה $H$ שונה, ובוודאי ש-$S$ זרה ל-$T^*$ החלקי ל-$T$. לכן אם $S \in Q$ אז $G(w) \cap S = S^*$.

כעת נראה ראשית כי $G$ מונוטונית. ברור כי לשם כך די להוכיח כי אם $x < w$ אז $F(x) \subseteq G(w)$, וזה נובע ישירות מהגדרת $G(w)$, ואם $y > w$ אז $G(w) \subseteq F(y)$. כדי להוכיח את הטענה האחרונה נראה שכל אחד מרכיבי האחוד בהגדרת $G(w)$ הוא קבוצה חלקית ל-$F(y)$. ל- $x < w$ קיים $x < w < y$ ולכן $F(x) \subseteq F(y)$. ל- $T \in Q$ קיים $T = \bigcap_{x\in A} F(x)^{H(x)}$, ומכיוון ש- $H(y) = 1$ לכן $T^* \subseteq T \subseteq F(y)^1 = F(y)$.

כעת נראה כי $G$ היא שיכון מרווח. תהי $H$ פונקצית הפרדה על $A \cup \{w\}$, עלינו להוכיח כי $G^*(H) = \bigcap G(x)^{H(x)} \ne \emptyset$. ברור כי $G^*(H) = F^*(H) \cap G(w)^{H(w)}$. נפריד את הדיון לשלושה מקרים.

א. קיים $x < w$ כך ש- $H(x) = 1$. במקרה זה בוודאי $H(w) = 1$ ו-אז $F^*(H) \subseteq F(x) \subseteq G(w)$ ולכן $G^*(H) = F^*(H) \cap G(w)^{H(w)} = F^*(H) \ne \emptyset$.

ב. קיים $y > w$ כך ש- $H(y) = 0$. במקרה זה בוודאי $H(w) = 0$ ו-אז $F^*(H) \subseteq \overline{F(y)} \subseteq \overline{G(w)}$ ולכן

$G^*(H) = F^*(H) \cap G(w)^{H(w)} = F^*(H) \cap \overline{G(w)} = F^*(H) \neq \emptyset$.

ג. לכל $x < w$ $H(x) = 0$ ולכל $y > w$ $H(y) = 1$. במקרה זה $F^*(H) \in Q$, נסמן את $F^*(H)$ ב-$S$. קיים $G^*(H) = F^*(H) \cap G(w)^{H(w)} = S \cap G(w)^{H(w)}$. מכיוון ש- $S \in Q$ אז כפי שנזכר לעיל $S^* = S \cap G(w)$. לכן אם $H(w) = 1$ אז $G^*(H) = S \cap G(w)^{H(w)} = S \cap G(w) = S^* \neq \emptyset$, ואם $H(w) = 0$ אז $G^*(H) = S \cap G(w)^{H(w)} = S \cap \overline{G(w)} = S \setminus (S \cap G(w)) = S \setminus S^*$, ומכיוון שלפי הגדרת $S^*$ $S \setminus S^* \neq \emptyset$ לכן $G^*(H) \neq \emptyset$.

**שיכון קבוצה סדורה חלקית בת מניה בשדה קבוצות חסר אטומים**. יהי $B$ שדה קבוצות חסר אטומים. כל קבוצה סדורה חלקית $A$ בת מניה ניתנת לשיכון ב-$B$.

**הוכחה**. תהי $A = \{a_0, a_1, \dots\}$. נגדיר ברקורסיה סדרת פונקציות $F_0, F_1, \dots$ כך שלכל $n$ טבעי $F_n$ היא שיכון מרווח של $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ ב-$B$ ו-$F_{n+1}$ הנה המשכה של $F_n$. האחוד $F$ של כל ה-$F_n$-ים הוא שיכון של $A$ ב-$B$.

$F_0$ תהיה הפונקציה הריקה. היא שיכון מרווח כי $\bigcap_{x \in \emptyset} F(x) = X \neq \emptyset$. בהנתן השיכון המרווח $F_n$ של $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ ב-$B$, אז לפי המשפט שהוכח לעיל קיימת המשכה של $F_n$ שהיא שיכון מרווח של $\{a_0, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ ב-$B$. נסמן שיכון כזה ב-$F_{n+1}$. $\bigcup_{n \in \omega} F_n$ הוא שיכון של $A$ ב-$B$.