קיום דרגת נל"ח $a \neq 0$ כך ש- $a' = 0'$

אנו בונים קבוצת נל"ח A שדרגתה תהיה כנדרש. בשלב s נכניס ל-A מספר סופי של מספרים. את קבוצות המספרים שהוכנסו ל-A לפני שלב s נסמן ב-A^s. כדי ש-A תהיה נל"ח הליך בנייתן צריך להיות חישוב.

יהי i משתנה העובר על כל התוכניות לחישוב פונקציה עם משתנה אחד, ו-j משתנה העובר על כל התוכניות לחישוב מספר עם אוב. מרחב המשימות שלנו כולל את המשימות הבאות.

$$(i) \qquad A \neq \{i\} \qquad\qquad\qquad (j) \qquad j^A \in W^A$$

היכן ש-W^A היא קבוצת כל התוכניות לחישוב מספר שחישובן מ-A מסתיים.

המטרה של המשימות (j) הוא להביא, במידת האפשר, לכך שהחישוב של $\{j\}^A$ יסתיים. נסדר את המשימות לפי טיפוס הסדר של המספרים הטבעיים ונתבונן בסידור זה כבסדרת עדיפויות, כלומר משימה הקודמת לחברתה בסדר זה נחשבת לעדיפה על חברתה. במשך התהליך נטפל בכל משימה (R) אינסוף פעמים, ובשלב s נבצע s צעדים בחישוב המתאים. מה שנמצא בשלב s הם הפריטים הבאים: קבוצה סופית של מספרים A^s, וקבוצות סופיות של מספרים $x_{(j)}$ עבור מספר סופי של j-ים. הקבוצה $x_{(j)}$ תיקרא **הגבלת**-(j) או **הגבלה**, (j) תיקרא **משימת ההגבלה** ועדיפות (j) תקרא **עדיפות ההגבלה**. המשמעות של הגבלת-(j) היא שיש להשתדל שאיבריה יישארו מחוץ ל-A כדי שהמשימה (j) תבוצע בהצלחה.

בשלב הראשון בו $s = 0$ הקבוצה A^0 ריקה ולא קיימות הגבלות. אנו אומרים שהגבלת-(j) **פעילה** בשלב s אם היא זרה ל-A^s, כלומר אם עד לשלב s לא הוכנסו ל-A איברים של ההגבלה.

בשלב s המיועד לטיפול במשימה (i) נבחר מספר k ונשתדל לגרום לכך ש- $A(k) \neq \{i\}(k)$. כדי למנוע שאותו המספר k ייבחר למשימות שונות נוח לחלק את קבוצת המספרים הטבעיים לשורות זרות, לפי התוכניות i, ולבחור את k בשורה ה-i. אם השורה i כבר מכילה מספר מ-A^s אז איננו עושים דבר. אחרת, יהי k המספר המזערי בשורה i שאינו באף הגבלה העדיפה על (i). אנו מבצעים s צעדים בחישוב $\{i\}(k)$. אם החישוב לא הסתיים איננו עושים דבר. אם החישוב הסתיים והערך של $\{i\}(k)$ הוא "שקר" אז אנו מוסיפים את k ל-A^s, כלומר $A^{s+1} = A^s \cup \{k\}$. כמובן שכל ההגבלות המכילות את k אינן פעילות יותר, ונאמר שהן **מבוטלות**. מכיוון שהנחנו ש-k אינו באף הגבלה העדיפה על (i) לכן כל ההגבלות שבוטלו ע"י הכנסת k ל-A הן הגבלות שעדיפותן נמוכה מעדיפות (i).

בשלב s המיועד לטיפול במשימה (j), אם ישנה הגבלת-(j) פעילה אז איננו עושים דבר. אחרת, אנו מבצעים s צעדים בחישוב $\{j\}^{A^s}$. אם החישוב לא הסתיים איננו עושים דבר. אם החישוב הסתיים אז אנו קובעים את קבוצת המספרים m שהחישוב משתמש בכך ש- $m \notin A^s$ כהגבלת-(j) חדשה. הגבלה חדשה זאת היא פעילה בשלב זה כי היא זרה ל-A^s.

הקבוצה A מוגדרת כאחוד של כל ה- A^s-ים.

טענה. לכל משימה (j) נוצר במשך התהליך רק מספר סופי של הגבלות-(j).

התהליך נקבע כך שהגבלת-(j) x מבוטלת רק כאשר מוכנס ל-A מספר k חדש כתוצאה מטיפול במשימה (i). היות ו-k זה נבחר לא להיות באף הגבלה בעלת עדיפות גדולה מזו של (i), לכן הדבר ייתכן רק כאשר (i) היא משימה שעדיפותה עולה על זו של (j). מכיוון שכל משימה (i) מכניסה ל-A לכל היותר מספר אחד, הנמצא בשורה i, לכן מספר הפעמים שהגבלת-(j) יכולה להתבטל הוא לכל היותר כמספר m של משימות-(i) העדיפות עליה. מכיוון שאיננו יוצרים הגבלת-(j) כאשר קיימת הגבלת-(j) פעילה נוצרות לכל היותר $m+1$ הגבלות-(j).

נוכיח עתה כי $A \neq \{i\}$. אם A מכילה מספר k הנמצא בשורה i אז בשלב בו הוכנס מספר זה ל-A החישוב של $\{i\}(k)$ הסתיים ונתן ערך "שקר". ערך זה שונה מ-$A(k)$ שהוא "אמת" ולכן $A \neq \{i\}$. אחרת,

יהי k המספר המזערי בשורה i שאינו באף הגבלת שעדיפותה עולה על עדיפות (i). ישנו מספר כזה כי מספר המשימות שעדיפותן עולה על (i) הוא סופי, לכל משימה יש רק מספר סופי של הגבלות וכל הגבלה היא קבוצה סופית. אם $\{i\}(k)$ אינו מוגדר אז $\{i\}$ כלל אינה קבוצה. אם $\{i\}(k)$ מוגדר יהי s כך שמן השלב s ואילך לא נוצרת ולא מבוטלת אף הגבלה העדיפה על (i), שלב s מיועד לטיפול במשימה (A_i), ו-s גדול או שווה למספר הצעדים בחישוב של $\{i\}(k)$. אם ערך $\{i\}(k)$ הוא "אמת" אז מכיוון ש-$A(k)$ הוא "שקר", כי A אינה מכילה אף מספר בשורה i, ו- $A \neq \{i\}$. אם ערך $\{i\}(k)$ הוא "שקר" אז מכיוון שמשלב זה ואילך לא נוצרות הגבלות עדיפות מ-(i) לכן נובע מקביעת k שהוא המספר המזערי בשורה i שבשלב s אינו נמצא באף הגבלה עדיפה מ-(i), ולפי הגדרת התהליך k מוכנס ל-A בשלב זה, בניגוד להנחתנו ש-A אינה מכילה אף מספר משורה i.

כעת נוכיח שאנו יכולים לחשב אם חישוב j^A מסתיים ע"י הסתייעות באוב ל-$0'$.

עבור משימה (j), אם הגבלת-(j) האחרונה הנוצרת אינה מבוטלת אף פעם אנו קוראים להגבלה זאת **הגבלה קבועה**. נוכיח בהמשך כי חישוב j^A מסתיים אםם קיימת הגבלת-(j) קבועה. נראה עתה כי קיים חישוב, הנעזר באוב ל-$0'$ העונה על השאלה אם קיימת הגבלת-(j) קבועה. החישוב מחקה את תהליך החישוב של בניית A, בהבדל הבא. בתחילת התהליך, ובכל שלב בו מבוטלת הגבלת-(j) האוב נשאל אם נוצרת הגבלת- (j) בשלב מאוחר יותר, ובכל שלב בו נוצרת הגבלת-(j) האוב נשאל אם הגבלה זאת מבוטלת בשלב מאוחר יותר. האוב יודע לענות על שאלות אלו. למשל כדי לשאול אם נוצרת הגבלת-(j) אחרי שלב s, ל-s מסויים, לוקחים את התוכנית של תהליך בניית A ומשנים אותה כך שאם אחרי שלב s נוצרת הגבלת-(j) אז התוכנית נעצרת, ואז שואלים את האוב אם התוכנית המתוקנת נעצרת או לא. מכיוון שנוצר ומבוטל רק מספר סופי של הגבלות-(j) לכן אחרי מספר סופי של צעדים מתקבלת תשובה שלילית, כלומר שלא נוצרת הגבלת-(j) נוספת, ואז אין הגבלת-(j) קבועה, או שהגבלת-(j) הפעילה הקיימת אינה מבוטלת, ואז אנו יודעים שיש הגבלת-(j) קבועה.

טענה. אם למשימה (j) יש הגבלה קבועה אז חישוב j^A מסתיים.

יהי s השלב בו נוצרה ההגבלה הקבועה x. אז בשלב s מבוצע חישוב של $\{j\}^{A^s}$ בלכל היותר s צעדים. לפי הגדרת ההגבלה x זאת היא קבוצת המספרים שחישוב $\{j\}^{A^s}$ משתמש בכך שהם אינם ב-A^s, ומכיוון שהגבלה זאת היא קבועה לא נוספים ל-A איברים של x גם בשלבים שאחרי s, ולכן איברי x גם אינם ב-A. מכיוון שגם $A^s \subseteq A$ לכן לפי עקרון השימוש חישוב $\{j\}^A$ זהה לזה של $\{j\}^{A^s}$ וגם הוא מסתיים.

טענה. אם חישוב j^A מסתיים אז למשימה (j) יש הגבלה קבועה.

יהי s מספר מספיק גדול המקיים את התנאים (א)-(ד) הבאים.

(א) מן השלב s ואילך לא נוצרת ולא מבוטלת אף הגבלת-(j) ואף הגבלה עדיפה ממנה,

(ב) שלב s מיועד לטיפול במשימה (j),

(ג) A^s מכיל את כל איברי A כך שהחישוב של $\{j\}^A$ משתמש בכך שהם ב-A,

(ד) s גדול או שווה למספר הצעדים בחישוב של $\{j\}^A$.

לפי עקרון השימוש, החישוב של $\{j\}^{A^s}$ זהה לזה של $\{j\}^A$ ולכן $\{j\}^{A^s}$ מוגדר ומחושב ב-s צעדים לכל היותר. אם בשלב s ישנה הגבלת-(j) פעילה אז מכיוון שמשלב זה ואילך לא מבוטלת אף הגבלת-(j) אז הגבלה זאת היא קבועה. אם בשלב s אין הגבלת-(j) פעילה אז לפי הגדרת התהליך נוצרת הגבלת-(j) בשלב זה, בניגוד להנחתנו על s.