קיום שתי קבוצות נל"ח שאינן ניתנות להשוואה

אנו בונים שתי קבוצות נל"ח A ו-B בשלבים. בשלב s הכנסנו לכל אחת משתי קבוצות אלו מספר סופי של מספרים. את קבוצות המספרים שהוכנסו ל-A ול-B לפני שלב s נסמן ב-A^s וב-B^s. כדי ש-A ו-B תהיינה נל"ח הליך בנייתן צריך להיות חישוב.
יהי I משתנה העובר על כל התוכניות לחישוב פונקציה עם משתנה אחד בעזרת אוב. מרחב המשימות שלנו כולל את המשימות הבאות.

$$(A_I) \qquad A \neq [I]^B \qquad\qquad\qquad (B_I) \qquad B \neq [I]^A$$

נסדר את המשימות לפי טיפוס הסדר של המספרים הטבעיים ונתבונן בסידור זה כבסדרת עדיפויות, כלומר משימה הקודמת לחברתה בסדר זה נחשבת לעדיפה על חברתה.

בשלב s אנו מטפלים במשימה (A_I) (המקרה של (B_I) דומה לגמרי). עבור מספר k מסויים אנו רוצים לדאוג לכך ש- $[I]^B(k) \neq A(k)$. אילולא רצינו שהתהליך יהיה חישוב יכולנו בשלב זה לשאול את $0'$ אם החישוב של $[I]^{B^s}(k)$ מסתיים ואז לקבוע את $A(k)$ כך שיהיה שונה מ- $[I]^{B^s}(k)$. אולם מכיוון שהתהליך הנוכחי הוא חישוב כל מה שאנו יכולים לעשות הוא לחשב את $[I]^{B^s}(k)$. אין ביטחון שחישוב זה מסתיים ואם הוא אינו מסתיים לא נגיע מעולם מעבר לשלב s. לכן עלינו לקבוע שבמשך התהליך נטפל במשימה (A_I) אינסוף פעמים, ובשלב s נבצע רק s צעדים בחישוב $[I]^{B^s}(k)$.

בעייה שניה היא הבאה. נניח שבשלב s מסויים החישוב של $[I]^{B^s}(k)$ הסתיים וקבענו את $A(k)$ כך שיהיה שונה מ- $[I]^{B^s}(k)$. חישוב זה עשוי להשתמש גם בעובדה שמספרים מסויימים אינם נמצאים ב-B^s, נסמן את קבוצת המספרים הזאת ב-x. בשלבים מאוחרים יותר של התהליך מוכנסים מספרים נוספים ל-B ואז יתכן כי נוסף ל-B איבר של x ואז יתכן כי $[I]^B(k) \neq [I]^{B^s}(k)$ ואין ביטחון כי המטרה $[I]^B(k) \neq A(k)$ אמנם הושגה. לכן בשלב s בו החישוב של $[I]^{B^s}(k)$ הסתיים בלכל היותר s צעדים צריך היה לקבוע שבשלבים יותר מאוחרים לא יוכנסו יותר ל-B איברים של x. הבעייה עם אפשרות זאת היא שייתכן שעבור משימה (B_J) מסויימת התהליך מנסה לחשב, באינסוף שלבים t, את $[J]^t(m)$ עבור m מסויים ב-x, ובשלב בו תהליך זה מסתיים ייתכן ונצטרך להכניס את m ל-B. אמנם אנו יכולים להחליט שמכיוון ש- $m \in x$ לא נכניס את m ל-B. במקרה זה, כדי לבצע את המשימה (B_J) נצטרך לבחור m אחר ושוב לחשב את $[J]^t(m)$. הבעייה היא שייתכן ובמהלך החישוב נצטרך לשנות את m אינסוף פעמים והמשימה (B_J) לא תבוצע בכלל. הפיתרון הוא שעלינו להתחשב בסדר העדיפויות של המשימות ולבטל הגבלות שהוטלו כדי להצליח במשימה מסויימת כדי להבטיח את ההצלחה של משימה בעלת עדיפות גבוהה יותר. לכן השיטה בה ננקוט נקראת שיטת העדיפות (Priority Method). כפי שכבר הוזכר, אנו מטפלים בכל משימה אינסוף פעמים. מה שנמצא בשלב s הם הפריטים הבאים: קבוצות סופיות של מספרים A^s ו-B^s, קבוצה סופית של קבוצות סופיות של מספרים $x_{(R)}$, היכן ש-(R) היא משימה. הקבוצה $x_{(R)}$ תיקרא **הגבלת**-(R) או **הגבלה**, (R) תיקרא **משימת ההגבלה** ועדיפות (R) תקרא **עדיפות ההגבלה**. המשמעות של ההגבלה $x_{(A_I)}$ היא שיש להשתדל שאיבריה יישארו מחוץ ל-B כדי שהמשימה (A_I) תבוצע בהצלחה, ולכן נקרא לה גם **הגבלת**-B, ובדומה ל- $x_{(B_I)}$. בשלב הראשון בו $s = 0$ הקבוצות A^0 ו-B^0 ריקות ולא קיימות הגבלות. אנו אומרים שהגבלת-B **פעילה** בשלב s אם היא זרה ל-B^s. בשלב s המיועד לטיפול במשימה (A_I), אם משימה זאת פעילה אז איננו עושים דבר. אחרת, נבחר מספר k ונשתדל לגרום לכך ש- $A(k) \neq [I]^B(k)$. כדי למנוע שאותו המספר k ייבחר למשימות שונות נוח לחלק את קבוצת המספרים הטבעיים לשורות זרות, לפי התוכניות I, ולבחור את k בשורה ה-I. יהי k המספר המזערי בשורה I שאינו ב-A^s ואינו באף הגבלת-A העדיפה על (A_I). אנו מבצעים s צעדים בחישוב $[I]^{B^s}(k)$. אם החישוב לא הסתיים איננו עושים דבר. אם החישוב הסתיים אז אנו קובעים את קבוצת המספרים m שהחישוב

משתמש בכך ש- $m \notin B^s$ כהגבלת-(A_I) חדשה. הגבלה חדשה זאת היא פעילה בשלב זה כי היא זרה ל-B^s. אם הערך של $[I]^{B^s}(k)$ הוא "שקר" אז אנו מוסיפים את k ל-A^s, כלומר $A^{s+1} = A^s \cup \{k\}$. כמובן שכל הגבלות-A המכילות את k אינן פעילות יותר, ונאמר שהן **מבוטלות**. מכיוון שהנחנו ש-k אינו באף הגבלת-A העדיפה על (A_I) לכן כל ההגבלות שבוטלו ע"י הכנסת k ל-A הן הגבלות-A שעדיפותן נמוכה מעדיפות (A_I).

הקבוצה A מוגדרת כאחוד של כל ה- A^s-ים ו-B כאחוד של כל ה-B^s-ים.

טענה. לכל משימה (R) נוצר במשך התהליך רק מספר סופי של הגבלות-(R).

אנו מוכיחים טענה זאת באינדוקציה על העדיפות של (R). השימוש באינדוקציה אפשרי כי סדר העדיפות הוא סדר המספרים הטבעיים. לפי הנחת האינדוקציה לכל משימה שעדיפותה עולה על זאת של (R) נוצר רק מספר סופי של הגבלות. לכן קיים מספר s כך שמן השלב ה-s ואילך לא נוצרת הגבלה לאף משימה שעדיפותה עולה על זאת של (R). לכן מן השלב ה-s ואילך אם קיימת הגבלת-(R) פעילה היא אינה יכולה להיות מבוטלת, כי התהליך נקבע כך שהגבלה מבוטלת רק כאשר נקבעת הגבלה בעלת עדיפות גבוהה יותר. מכיוון שאיננו יוצרים הגבלת-(A_I) חדשה בשלב בו קיימת הגבלת-(A_I) פעילה לכן אחרי שלב s נוצרת לכל היותר הגבלת-(A_I) פעילה אחת.

עבור משימה (A_I), אם הגבלת-(A_I) האחרונה הנוצרת אינה מבוטלת אף פעם אנו קוראים להגבלה זאת **הגבלה קבועה**.

טענה. אם למשימה (R) יש הגבלה קבועה אז היא בוצעה בהצלחה.

יהי s השלב בו נוצרה ההגבלה הקבועה x. נניח ש-(R) היא (A_I). אז בשלב s מבוצע חישוב של $[I]^{B^s}(k)$ בלכל היותר s צעדים, היכן ש- k הוא מספר בשורה I שאינו ב-A^s. לפי הגדרת ההגבלה x זאת היא קבוצת המספרים שחישוב $[I]^{B^s}(k)$ משתמש בכך שהם אינם ב-B^s, ומכיוון שהגבלה זאת היא קבועה לא נוספים ל-B איברים של x גם בשלבים שאחרי s, ולכן איברי x גם אינם ב-B. מכיוון שגם $B^s \subseteq B$ לכן לפי עקרון השימוש $[I]^B(k) = [I]^{B^s}(k)$. אם $[I]^{B^s}(k)$ הוא "שקר" אז בשלב s הכנסנו את k ל-A ולכן $A(k)$ הוא "אמת" וקיים $[I]^B \neq A$. אם $[I]^{B^s}(k)$ הוא "אמת" אז k שאינו ב-A^s אינו מוכנס ל-A בשלב s וגם אינו מוכנס ל-A בשלב מאוחר יותר כי k בשורה I ומספרים בשורה I מוכנסים ל-A רק בשלבים בהם נוצרות הגבלות-(A_I), ו-s הוא השלב האחרון כזה. לכן $k \notin A$ ו- $A(k)$ הוא "שקר" וקיים $[I]^B \neq A$.

סיום הוכחת המשפט. נוכיח עתה כי $[I]^B \neq A$. ויהי k המספר המזערי בשורה I שאינו ב-A ואינו באף הגבלת-A העדיפה על(A_I) (רק מספר סופי של מספרים בשורה I הם ב-A כי מספר בשורה I מוכנס ל-A רק כאשר נוצרת הגבלת-(A_I)). אם $[I]^B(k)$ אינו מוגדר אז $[I]^B$ כלל אינה קבוצה. אם קיימת הגבלת-(A_I) קבועה גם אז, כפי שראינו לעיל, $[I]^B \neq A$. נראה עתה שלא ייתכן שלא קיימת הגבלת-(A_I) קבועה.

יהי s מספר מספיק גדול המקיים את התנאים (א)-(ד) הבאים.

(א) מן השלב s ואילך לא נוצרת ולא מבוטלת אף הגבלת-(A_I) ואף הגבלה עדיפה ממנה,

(ב) שלב s הוא שלב מיועד לטיפול במשימה (A_I),

(ג) B^s מכיל את כל איברי B כך שהחישוב של $[I]^B(k)$ משתמש בכך שהם ב-B,

ו-(ד) s גדול או שווה למספר הצעדים בחישוב של $[I]^B(k)$.

לפי עקרון השימוש, החישוב של $[I]^{B^s}(k)$ זהה לזה של $[I]^B(k)$ ולכן $[I]^{B^s}(k)$ מוגדר ומחושב ב-s צעדים לכל היותר. משלב s ואילך לא נוצרות הגבלות-(A_I) ולכן לא מתווספים ל-A מספרים בשורה I. מכיוון שמשלב זה ואילך גם לא נוצרות הגבלות-A עדיפות על (A_I) לכן k הוא גם המספר המזערי בשורה I שאינו ב-A^s ואינו באף הגבלת-A העדיפה על (A_I). בשלב s אין הגבלת-(A_I) פעילה כי אילו היתה כזאת היא היתה קבועה מכיוון שמשלב r ואילך לא מבוטלת אף הגבלת-(A_I). לכן לפי הגדרת התהליך, מכיוון שהחישוב של $[I]^{B^s}(k)$ מסתיים בלכל היותר s צעדים ו-k הוא כנדרש, לכן נוצרת בשלב זה הגבלת-(A_I), בניגוד לבחירת s.