פרק ג': שיטת ההמשכה הסופית

מינוח. לקבוצה A נסמן ב-A^* את קבוצת הסדרות הסופיות של איברי A. בסדרה באורך n נתבונן גם כבפונקציה חלקית על ω המוגדרת על המספרים מ-0 עד $n-1$. לסדרה סופית נקרא גם **מחרוזת**. כל עוד לא נאמר אחרת המחרוזות בהן נעסוק תהיינה סדרה סופיות של אפסים ואחדים, כלומר איברים של 2^*. מחרוזות כאלו יסומנו באותיות ρ, σ, τ. לסדרה אינסופית של אפסים ואחדים, כלומר לאיבר של ${}^{\omega}2$, נקרא **מחרוזת אינסופית**. למחרוזת σ ומחרוזת או מחרוזת אינסופית τ נכתוב $\sigma \preceq \tau$ אם τ המשכה של σ, ו- $\sigma \prec \tau$ אם τ המשכה ממש של σ.
המחרוזות האיסופיות הן פונקציות אופייניות של קבוצות של מספרים טבעיים. תפקיד מחרוזות הסופיות יהיה, בדרך כלל, לספק מידע סופי על קבוצת טבעיים A, כלומר מחרוזת σ באורך n אומרת אילו מבין המספרים 0 עד $n-1$ נמצאים ב-A ואילו לא. לכן, כאשר אנו כותבים $\{e\}^{\tau}(n)\downarrow$ או כאשר אנו משתמשים בערך $\{e\}^{\tau}(n)$ הכוונה היא שהחישוב נעשה מקבוצה A מסויימת כאשר כל המידע על A בו השתמש החישוב נמצא ב-τ.

משפט 1 קיימות שתי דרגות $\mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \mathbf{0}'$ שאינן ניתנות להשוואה.
הוכחה: נבנה שתי קבוצות A, B של טבעיים שדרגותיהן תהיינה כנדרש. קבוצות אלו נבנות ב-ω שלבים, כאשר בתום כל שלב נקבע לכל אחת מקבוצות אלו רק המידע הנתון ע"י המחרוזות σ ו-τ. בכל שלב נבצע משימה מסויימת ע"י שנמשיך את המחרוזות σ, τ למחרוזות σ', τ'. המשימות הן:
$R_{1,e}$: לקבל n כך ש- $A(n) \neq \{e\}^B(n)$ ו- $R_{2,e}$: לקבל n כך ש- $A(n) \neq \{e\}^B(n)$.
בביצוע המשימה $R_{1,e}$ יהי n המספר הראשון שאינו בתחום σ ונגדיר את $\sigma'(n)$ כך: אם קיים $t \supseteq \tau'$ כך ש- $\{e\}^{\tau'}(n)\downarrow$ נבחר את τ' זה ו- $\sigma'(n) = 1 - \{e\}^{\tau'}(n)$, ואם לא קיים τ' כזה אז נקבע ל-$\sigma'(n)$ ערך שרירותי, למשל 0.
התשובה לשאלה אם קיים τ' כנ"ל ניתנת לחישוב מקבוצת העצירה, כי אפשר לכתוב תוכנית המחפשת τ' כזה.
תרגיל 2. לכל דרגה $\mathbf{a}$ קיימות קבוצות A_i חשיבות כך שהקבוצה $\oplus_{i\in I} A_i$ היא מדרגה $\mathbf{a}$.

משפט 3. קיימת סדרת קבוצות A_i, $i \in \omega$, חשיבה מ-$0'$, כך שלכל $i \in \omega$ הקבוצה A_i אינה חשיבה מ- $\oplus_{j\in\omega, j\neq i} A_j$
הוכחה. דומה להוכחת משפט 1, כאשר המשימה $R_{i,e}$ דואגת לכך ש- A_i לא תהיה חשיבה מ- $\oplus_{j\in\omega, j\neq i} A_j$ באמצעות התוכנית e.

הגדרה 4. קבוצת דרגות W נקראת **בלתי תלויה** (**חשיבותית**) אם אף דרגה ב-W אינה קטנה או שווה מחיבור של מספר סופי של דרגות אחרות ב-W. בדומה נאמר שקבוצה W של קבוצות טבעיים היא בלתי תלויה אם אף אחת מן הקבוצות ב-W אינה חשיבה ממספר סופי של קבוצות אחרות ב-W.
מסקנה 5. קיימת קבוצת דרגות בת מנייה שהיא בלתי תלוייה.

למה 6. קיים סדר חלקי חשיב על הטבעיים כך שכל קבוצה סדורה חלקית בת מנייה ניתנת לשיכון בו.
הוכחה: בשם קטע רציונלי נקרא לקטעים בקבוצת המספרים הרציונליים מהצורה $[r, s)$, $(-\infty, s)$ ו- $[r, \infty)$, היכן ש-r, s מספרים רציונליים, $r < s$. הקבוצה W של הקבוצות שהן אחודים של מספר סופי, כולל 0, של קטעים רציונליים היא אלגברת קבוצות חסרת אטומים. לפי משפט, באלגברה כזאת אפשר לשכן כל סדר חלקי בן מנייה. כל איבר של W נתון ע"י סדרה סופית של רציונליים שאפשר להציגה ע"י מספר טבעי, וברור כי יחס ההקפה של איברי W הוא חשיב והוא עובר ליחס חשיב על הטבעיים.

משפט 7. אם $\prec$ יחס סדר חלקי חשיב על המספרים הטבעיים אז קיים לו שיכון בדרגות קטנות או שוות ל-$\mathbf{0}'$. לכן כל סדר חלקי בן מנייה ניתן לשיכון בדרגות קטנות או שוות ל-$\mathbf{0}'$.
הוכחה. תהי A_i סידרת הקבוצות של משפט 3. לכל $m \in \omega$ תהי $B_m = \oplus_{i \preceq m} A_i$ ותהי $\mathbf{b}_m$ דרגת B_m. אז $\mathbf{b}$ הוא שיכון כנדרש.

הגדרה 8. א. פונקציה חלקית f מ-2^* ל-2^* נקראת **מונוטונית** אם למחרוזות $\sigma \prec \tau$ אם $f(\tau)$ מוגדר אז גם $f(\sigma)$ מוגדר וקיים $f(\sigma) \prec f(\tau)$.
ב. אם f פונקציה מונוטונית מ-2^* ל-2^* אז לכל $x \in {}^{\omega}2$ $f(x)$ מוגדר כ- $\bigcup_{n\in\omega} f(x \upharpoonright n)$; ברור כי $f(x) \in {}^{\omega}2$.
משפט 9. קיימת קבוצת דרגות בלתי תלויה בעוצמה $2^{\aleph_0}$.
הוכחה. בהוכחה זאת נקרא בשם **מחרוזת** לסדרה סופית של אפסים ואחדים, כלומר לאיבר של 2^*, וסדרה כזאת היא פונקציה על מספר טבעי n כלשהו לתוך $\{0,1\}$. לסדרה אינסופית של אפסים ואחדים, כלומר לאיבר של ${}^{\omega}2$, נקרא **מחרוזת אינסופית**. למחרוזת σ ומחרוזת או מחרוזת אינסופית τ נכתוב $\sigma \preceq \tau$ אם τ המשכה של σ, ו- $\sigma \prec \tau$

אם τ המשכה ממש של σ.

מטרתנו היא לבנות קבוצה בלתי תלויה של מחרוזות אינסופיות בעוצמה $2^{\aleph_0}$, כאשר בכל שלב של הבניה ידועה לנו רק רישא של כל מחרוזת אינסופית. בשלב מסויים של הבניה אנו דואגים לכך שאי אפשר יהיה לחשב מחרוזת אינסופית אחת ממחרוזות אינסופיות אחרות ע"י התוכנית e, אולם מכיון שקיימות מחרוזות שונות שהרישאות שלהן הידועות בשלב זה הן שוות אז כמובן שבשלב זה איננו יכולים לדאוג לכך שאחת מהן לא תהיה ניתנת לחישוב מחברתה. לכן עלינו לטפל באי החישוביות באמצעות התוכנית e לא פעם אחת בלבד אלא אינסוף פעמים. נשתמש לשם כך בפונקציה $p(k,l)=\binom{k+l+1}{2}+k$ שהיא העתקה חח"ע של $\omega\times\omega$ על ω, ונטפל בתוכנית e בכל שלב $p(e,l)$. נסמן ב-q,r את הפונקציות מ-ω ל-ω ההפוכות ל-p כלומר, המקיימות $n=p(q(n),r(n))$ לכל n, ואז בשלב n נטפל בתוכנית $q(n)$.
לצורך הוכחה זאת נקרא בשם **עץ בגובה n** לפונקציה מונוטונית T מקבוצת המחרוזות בגובה $<n$ לתוך קבוצת המחרוזות, ובשם **עץ אינסופי**, או **עץ בגובה ω** נקרא לפונקציה T כזאת שתחומה הוא קבוצת כל המחרוזות.

מה שנעשה הוא שנבנה סדרת עצים T_n, כך ש-T_n הוא עץ בגובה n ו- T_{n+1} הוא המשכה של T_n, ואחוד העצים בסדרה יהיה עץ אינסופי T כך שהמחרוזות האינסופיות $T(x)$ עבור $x\in{}^\omega 2$ הן בלתי תלויות.

נקבע את T_1 כך ש- T_1 עץ בגובה 1 ו- $T_1(\langle\rangle)=\langle\rangle$. בשלב ה-$n$ אנו יוצאים מן העץ T_n שגובהו n ומגדירים את T_{n+1}. לכל מחרוזת σ באורך $<n$ נקבע $T_{n+1}(\sigma)=T_n(\sigma)$, ונותר לנו לקבוע את המחרוזות $T_{n+1}(\sigma)$ למחרוזות σ באורך n.

תהי Q_n קבוצת כל המחרוזות באורך n. ברור כי מספר איברי Q_n הוא 2^n. יהי m מספר הסדרות הלא ריקות ללא חזרות של איברי Q_n. נסדר את m הסדרות הללו בסדר כלשהו ואת הסדרה ה-i ביניהן נסמן ב- $\langle\sigma_{i,0},\dots,\sigma_{i,k_i}\rangle$.

כפי שאמרנו, מטרתנו היא לקבוע את $T_{n+1}(\sigma)$ לכל $\sigma\in Q_n$. ל- $\sigma\in Q_n$ נקבע את $T_{n+1}(\sigma)$ ע"י סדרת של קרובים שנסמנם ב- $\tau_{\sigma,0},\tau_{\sigma,1},\dots,\tau_{\sigma,m}$ ו- $T_{n+1}(\sigma)$ יהיה האיבר האחרון $\tau_{\sigma,m}$ של סדרה זאת או המשכה פשוטה של איבר זה. את הקרובים $\tau_{\sigma,0},\tau_{\sigma,1},\dots,\tau_{\sigma,m}$ אנו בונים לכל $\sigma\in Q_n$ במקביל, צעד אחר צעד. בהתחלה אנו קובעים, לכל $\sigma\in Q_n$, $\tau_{\sigma,0}=T_n(\sigma\restriction n)$, כאשר $\sigma\restriction n$ היא המחרוזת $\langle\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}\rangle$ כאשר אנו מגיעים לצעד ה-i, $1\le i\le m$, כבר נקבעו המחרוזות $\tau_{\sigma,i-1}$ לכל $\sigma\in Q_n$, ובשלב זה נקבע את $\tau_{\sigma,i}$ לכל $\sigma\in Q_n$. נקבע $\tau_{\sigma,i}=\tau_{\sigma,i-1}$ לכל $\sigma\in Q_n$ פרט ל- $\sigma_{i,0},\dots,\sigma_{i,k_i}$.

נקבע כעת את $\tau_{\sigma_{i,0},i},\dots,\tau_{\sigma_{i,k_i},i}$ כך שאם $x_0,\dots,x_{k_i}$ מחרוזות אינסופיות כך שעבור $0\le j\le k_i$ $\tau_{\sigma_{i,j},i}\prec x_j$ אז x_0 אינו חשיב מ- $\oplus_{1\le j\le k_i}x_j$ באמצעות התוכנית $p(n)$. יהי l האורך של $\tau_{\sigma_{i,0},i-1}$. נבחין עתה בין שני מקרים.

מקרה א': קיימות המשכות ρ_j של $\tau_{\sigma_{i,j},i-1}$ עבור $1\le j\le k_i$ כך ש- $\{q(n)\}^{\oplus_{1\le j\le k_i}\rho_j}(l)\downarrow$. במקרה זה נקבע $\tau_{\sigma_{i,j},i}=\rho_j$ עבור $1\le j\le k_i$ ו- $\tau_{\sigma_{i,0},i}$ היא ההמשכה של $\tau_{\sigma_{i,0},i-1}$ באורך $l+1$ הנתונה ע"י $\tau_{\sigma_{i,0},i}(l)=1-\{q(n)\}^{\oplus_{1\le j\le k_i}\rho_j}(l)$.

מקרה ב': לא קיים מקרה א'. במקרה זה נקבע $\tau_{\sigma,i}=\tau_{\sigma,i-1}$ לכל $\sigma\in Q_n$.

מכיוון שאנו רוצים שלכל מחרוזת σ באורך n יתקיים $T_{n+1}(\sigma)\succ T_{n+1}(\sigma\restriction n)$ אז אם קרה ש- $\tau_{\sigma,m}=T_{n+1}(\sigma\restriction n)$ אז נקבע את $T_{n+1}(\sigma)$ כמחרוזת $\tau_{\sigma,m}$ בתוספת 0 או 1 בסופה.

נוכיח עתה כי עבור מחרוזות אינסופיות $x_0,\dots,x_k$ השונות זו מזו המחרוזות $T(x_0),\dots,T(x_k)$ הן בלתי תלויות, ובמיוחד הן שונות זו מזו. מזה נובע, כמובן, שהקבוצה $\{T(x)|x\in{}^\omega 2\}$ היא בעוצמה $2^{\aleph_0}$ ושהיא בלתי תלויה. נניח כי $x_0=\{e\}^{\oplus_{1\le i\le k}x_i}$. יהי r כך ש- $x_0\restriction r,\dots,x_k\restriction r$ שונים זה מזה ויהי $n=p(e,r)\ge r$. יהי $\sigma_j=x_j\restriction n$ עבור $0\le j\le k$. לפי הגדרת הסדרות $\langle\sigma_{i,0},\dots,\sigma_{i,k_i}\rangle$ בהגדרת T_{n+1} אחת מסדרות אלו שווה ל- $\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_k$, יהי i כזה. בשלב בו נקבעו $\tau_{\sigma_{i,j},i}$ קרה אחד המקרים א' או ב' דלעיל. אם קרה מקרה א' אז $\tau_{\sigma_0,i}(l)=1-\{e\}^{\oplus_{1\le j\le k_i}\tau_{s_j,i}}(l)$, ולכן $T(x_0)(l)=1-\{e\}^{\oplus_{1\le j\le k}T(x_j)}(l)$ כלומר, התוכנית e מחשבת מ- $T(x_1),\dots,T(x_k)$ פונקציה שלמה או חלקית שערכה עבור מספר מסויים l שונה מ- $T(x_0)(l)$. אם קרה מקרה ב' אז לכל ההמשכות $\rho_1,\dots,\rho_k$ של $\tau_{\sigma_1,i},\dots,\tau_{\sigma_k,i}$ $\{e\}^{\oplus_{1\le j\le k}\rho_j}(l)$ אינו מוגדר, ולכן $\{e\}^{\oplus_{1\le j\le k}T(x_j)}(l)$ אינו מוגדר, ולכן התוכנית e אינה מחשבת מ- $T(x_1),\dots,T(x_k)$ פונקציה שלמה כלשהי.

משפט 10. לכל דרגה $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ קיימת דרגה $\mathbf{a}<\mathbf{b}'$ שאינה ניתנת להשוואה איתה.

הוכחה: בהינתן B נבנה את A ע"י ביצוע המשימות הבאות: R_{2e}: A שונה מ-$\{e\}^B$. R_{2e+1}: B שונה מ- $\{e\}^A$.
תהי המחרוזת σ קרוב של A. בשלב $2e$ יהי אורך σ n. אם $\{e\}^B(n)\downarrow$ אז נרחיב את σ ע"י הוספת $1-\{e\}^B$ לסופה,

ואחרת לא נשנה את σ. בשלב $2e+1$ אם קיימת הרחבה σ' של σ ומספר n כך ש- $\{e\}^{s'}(n)\downarrow$ ו- $\{e\}^{s'}(n) \neq B(n)$ אז נרחיב את σ ל-σ' כזאת, ואחרת נשאיר את σ כמות שהיא.

כמו בהוכחת משפט 1 A אינה חשיבה מ-B. נניח כי $B = \{e\}^A$. אז בשלב $2e+1$ לאף n לא היתה הרחבה σ' של σ כך ש- $\{e\}^{\sigma'}(n) \neq B(n)$. מכיוון שלכל n $\{e\}^A(n)\downarrow$ לכן קיימת הרחבה σ' של σ כך ש- $\{e\}^{s'}(n) = B(n)$. לכן $B(n)$ שווה ל- $\{e\}^{s'}(n)$ להמשכה s' כלשהי של s עבורה $\{e\}^{s'}(n)\downarrow$, ויש s' כאלו. זהו אלגוריתם ל-B, ולכן הקבוצה B חשיבה, בניגוד להנחתנו.

תרגיל 11. לכל קבוצה בת מנייה של דרגות שונות מ-$\mathbf{0}$ קיימת דרגה שאינה ניתנת להשוואה עם אף אחת מהן.

הגדרה 12. א. זוג $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ של דרגות נקרא **זוג מינימלי** אם הן גדולות מ-$\mathbf{0}$ והדרגה היחידה הקטנה או שווה משתיהן היא $\mathbf{0}$, כלומר החיתוך שלהן הוא $\mathbf{0}$.

ב. דרגה נקראת **מינימלית** אם היא שונה מ-$\mathbf{0}$, והדרגה היחידה הקטנה ממנה היא $\mathbf{0}$.

משפט 13. קיים זוג מינימלי. יתר על כן, לכל דרגה $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ קיימת דרגה $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}'$ כך שהזוג $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ הוא מינימלי.

הוכחה. ההוכחה דומה להוכחת משפט 10 והמשימות בבניית A הן:

R_{2e}: $A \neq \{e\}$, $R_{2p(e,i)+1}$: אם $\{e\}^A = \{i\}^B = C$ אז C חשיבה.

בשלב ה- $2p(e,i)+1$ אם יש המשכה σ' של σ ומספר n כך ש- $\{e\}^{\sigma'}(n) \neq \{i\}^B(n)$ אנו עוברים ל-σ' ואחרת לא משנים את σ. אם בסוף $\{e\}^A = \{i\}^B = C$ אז בשלב הנ"ל לא היו σ' ו-n כנ"ל ולכל n $C(n) = \{e\}^{\sigma'}(n)$ עבור σ' כלשהו כך ש- $\{e\}^{\sigma'}(n)\downarrow$, ולכן C חשיבה.

תרגיל 14. קיימת קבוצה בעוצמה $2^{\aleph_0}$ של דרגות כך שכל שתיים מהן מהוות זוג מינימלי.

רמז: בנה עץ מתאים של קבוצות בדומה להוכחת משפט 9 תוך הפעלת משימות כמו בהוכחת משפט 13.

מסקנה 15. כל אנטישרשרת של דרגות בעוצמה $< 2^{\aleph_0}$ ניתנת להגדלה, ולכן כל אנטישרשרת מקסימלית עוצמתה $2^{\aleph_0}$.

הערה: הטענה המקבילה שכל קבוצה בלתי תלויה של דרגות בעוצמה $< 2^{\aleph_0}$ ניתנת להגדלה היא בלתי תלויה באקסיומות ZFC, כי הטענה שכל קבוצה בלתי תלויה מקסימלית של דרגות היא בעוצמה $< 2^{\aleph_0}$ היא בלתי תלויה באקסיומות ZFC.

הוכחה. תהי W קבוצת דרגות בעוצמה $2^{\aleph_0}$ שכל שתים מהן הן זוג מינימלי. תהי Q קבוצה של דרגות שונות מ-$\mathbf{0}$ בעוצמה $< 2^{\aleph_0}$. הסגור של Q כלפי מטה גם הוא בעוצמה $< 2^{\aleph_0}$. מצד שני, לכל איבר של Q יש לכל היותר איבר יחיד של W הגדול ממנו, כי הדרגה היחידה הקטנה משתי דרגות של W היא 0. לכן קבוצת איברי W הניתנים להשוואה עם איבר כלשהוא של Q היא בעוצמה $< 2^{\aleph_0}$ ויש ב-W איבר שאינו ניתן להשוואה עם אף איבר של Q.

16. שיטת ההמשכה הסופית. המשותף לכל הבניות שעשינו הוא שבכל אחת מהן היתה סדרה של משימות R_i שכל אחת מהן בוצעה ע"י המשכה של מחרוזת σ למחרוזת σ' (או של שתי מחרוזות σ, τ לשתי מחרוזות σ', τ', ובדומה במקרה של עץ). מבחינה טופולוגית זה אומר שכל משימה מגדירה קבוצה פתוחה צפופה, ושכולן יחד יוצרות קבוצה שמנה (comeager). גם מבלי להכנס לטופולוגיה ברור שהוספת עוד משימות אינה מפריעה לקבלת התוצאה, וניתן להשיג שתי תוצאות יחד. (כמובן שההערכה של דרגת הקבוצה הנבנית ע"י סדרה אחת של משימות אינה נשארת בהכרת נכונה כאשר מוסיפים משימות. למשל, אפשר לבנות דרגה שאינה ניתנת להשוואה עם כל אחת משתי דרגות נתונות השונות מ-$\mathbf{0}$. כאשר אנו בונים קבוצה בשיטת ההמשכה הסופית השיטה הזאת נותנת לנו $2^{\aleph_0}$ קבוצות כי אחרי ביצוע כל משימה אנו יכולים להוסיף למחרוזת 0 או1. כך כאשר בנינו לדרגה $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ דרגה $\mathbf{a}$ שאינה ניתנת להשוואה אותה הבנייה יכולה לתת $2^{\aleph_0}$ קבוצות A , ולכן גם $2^{\aleph_0}$ דרגות שאינן ניתנות להשוואה עם $\mathbf{b}$. מה שאמרנו עתה מעיד גם על מגבלות שיטת ההמשכה הסופית, כי אם, למשל אפשר לבנות על ידיה קבוצה A בעלת תכונות מסויימות אז הפעלה אחרת של שיטה זאת אינה יכולה לתת קבוצה בעלת תכונות נוגדות. למשל, בדרך בה בנינו שתי דרגות לא ניתנות להשוואה אפשר לבנות דרגה אחת שהיא סכום של שתי דרגות לא ניתנות להשוואה. כעת אפשר לשאול אם קיימת דרגה מינימלית, כלומר דרגה השונה מ-$\mathbf{0}$ והדרגה היחידה הקטנה ממנה היא $\mathbf{0}$. דרגה מינימלית היא כמובן אינה הסכום של שתי דרגות לא ניתנות להשוואה, ולכן אי אפשר לקבל דרגה מינימלית בשיטת ההמשכה הסופית.

המשפט הבא מוכח לא בשיטת ההמשכות הסופיות אלא בשיטת ההמשכות הקואינסופיות, כלומר המשכות המשאירות איסוף אפשרויות. המשפט הבא מוכח בדרך הדומה להוכחת משפט 13.

משפט ספקטור 17. תהי $\mathbf{a}_n$ סדרת דרגות כך שאף סכום של מספר סופי מהן אינו חסם מלעיל של הסדרה' ותהי $\mathbf{b}$

חסם מלעיל שלהן. אז קיימת דרגה שאינה ניתנות להשוואה עם $\mathbf{b}$ כך ש- $\mathbf{b},\mathbf{c} > \mathbf{a}_n$ לכל n, ולכל דרגה $\mathbf{d}$ כך ש- $\mathbf{d} < \mathbf{b},\mathbf{c}$ קיים n כך ש- $\mathbf{d} \leq \bigcup_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i$. לכן לסדרה $\mathbf{a}_n$ אין חסם עליון ולזוג $\mathbf{b},\mathbf{c}$ אין חסם תחתון.

מקרים מיוחדים של סדרה $\mathbf{a}_n$ כזאת היא סדרת דרגות בלתי תלויה וסדרת דרגות עולה. במקרה של סדרת דרגות עולה קיים לכל $\mathbf{d} < \mathbf{b},\mathbf{c}$ n כך ש- $\mathbf{d} \leq \mathbf{a}_n$.

מסקנה. לקבוצת דרגות יש חסם עליון אםם יש לה קבוצה חלקים סופית שהסכום שלה הוא חסם מלעיל לקבוצה.

משפט 17 הוא חיזוק של משפט V.4.3 בעמוד 485 בספר של Odifreddi ושל המשפט בעמוד 34 של הספר Degrees of Unsolvability של Shoenfield, והוכחתו דומה מאוד להוכחות הנמצאות בספרים אלו. ההוכחה משתמשת ברעיון ההוכחה של משפט 13.