פרק ד׳: סוגי מספרים

בפרק זה נעסוק במספרים העגולים, שהם הכללה של המספרים השלמים, במספרים התיקניים, שהם הכללה של המספרים הממשיים, ובספרים הממשיים עצמם, ובמספרים הסודרים.

4.1 איברים סופיים בשדה סדור. בכל שדה סדור S ישנו שיכון יחיד של שדה המספרים הרציונליים, ושיכון זה גם שומר על הסדר. אנו נזהה את המספר הרציונלי r עם תמונתו תחת שיכון זה.

איבר של S נקרא **סופי** אם הוא נמצא בין שני מספרים שלמים, ואחרת הוא נקרא **אינסופי**. אם x, y סופיים אז גם $-x$, $x+y$ ו- $x \cdot y$ סופיים, כלומר, האיברים הסופיים מהווים תחום שלמות.

4.2 מספרים עגולים. מספר x נקרא **עגול** אם $x = \{x-1 \mid x+1\}$.

מכיוון שתמיד קיים $x-1 < x < x+1$ לכן כדי להוכיח באמצעות משפט הביניים שמספר x הוא עגול די להוכיח שאף אחת מן האופציות שלו אינה בין $x-1$ ל- $x+1$.

4.3 משפט. א. כל סודר הוא עגול.

ב. אם x הוא עגול אז אין אף מספר עגול אחר בין $x-1$ ל- $x+1$.

ג. מספר סופי הוא עגול אםם הוא מספר שלם.

ד. $\frac{\omega}{2}$ הוא עגול.

ה. אם x, y עגולים אז גם $-x$, $x+y$ ו- xy הם עגולים, ולכן המספרים העגולים הם תחום שלמות של מספרי קונווי.

הוכחה. ב. השתמש ב-2.37ב׳ ד. השתמש ב-2.51ב׳.

ה. כפי שהזכרנו בתחילת פרק ג׳ קיים

$$xy = \{xy - (x-x^L)(y-y^L), xy - (x^R-x)(y^R-y) \mid xy + (x-x^L)(y^R-y), xy + (x^R-x)(y-y^L)\}.$$

השתמש בשוויון זה.

4.4 עיגול של מספר. לכל מספר x נקרא למספר $\{x-1, x+1\}$ בשם **העיגול של x**.

לכל מספר x העיגול של x הוא עגול.

לאור 4.3, אם z מספר עגול אז העיגול של כל מספר בין z ל- $z+1$ הוא זהו מבין שני מספרים אלו שנברא לפני חברו.

הוכחה. יהי $y = \{x-1, x+1\}$ ו- $z = \{x-2, x+2\}$. תתכן אחת משלוש האפשרויות הבאות.

א. $x-1 < z < x+1$. מכיוון ש- $x-2 < x-1 < y, z < x+1 < x+2$ לכן, לפי 2.37ב׳, $z = y$. מכיוון ש- $x-2 < y-1 < y = z < y+1 < x+2$, לכן, לפי 2.37ב׳, $y = z = \{y-1 \mid y+1\}$ ו-y הוא עגול.

ב. $x-2 < z \le x-1$. יהי α יום ההולדת של z, ואז, לפי 2.41, יום ההולדת של $z+1$ הוא לכל היותר $\alpha+1$. מכיוון ש- $x-2 < z \le x-1 < z+1 < x < x+2$ הוא, לפי 2.38, המספר היחיד בין $x-2$ ו- $x+2$ שנברא ביום $\ge \alpha$, ולכן $z+1$, הנמצא בקטע $(z, x+2)$, נברא ביום $\alpha+1$, ואין בקטע זה שום מספר שנברא לפני יום זה. לכן, לפי משפט הביניים $z+1 = \{z \mid x+2\}$. מכיוון ש- $z \le x-1 < y < x+1 < x+2$, $y = \{x-1 \mid x+1\}$ ו- $z+1 = \{z \mid x+2\}$, לכן, לפי 2.37ב׳, $z+1 = y$. מכיוון שקיים עתה $y-1 = z < z+1 = y < y+1 < x+2$ לכן, לפי 2.37ב׳, $y = z+1 = \{y-1 \mid y+1\}$.

ג. $x+1 \le z < x+2$. זהו המקרה הסימטרי ל-ב׳.

4.5 תרגיל. א. הוכח כי מספר x הוא עגול אםם קיימים $y \le x-1$ ו- $z \ge x+1$ כך ש- $x = \{y \mid z\}$.

ב. לכל סודר α חשב את העיגול של $\alpha - \frac{1}{2}$.

עד עתה עסקנו במספרים העגולים שהם הכללה של המספרים השלמים גם מן הבחינה שהמספרים הסופיים העגולים הם בדיוק השלמים, וגם מן הבחינה שלכלל המספרים העגולים יש תכונות הדומות לתכונות השלמים. כעת נעבור לעסוק במספרים התיקניים שהם הכללה דומה של המספרים הממשיים, ובמספרים הממשיים עצמם.

4.6 זעירונים בשדה סדור. איבר של שדה סדור S נקרא **זעירון** אם הוא שונה מ-0 אבל ערכו המוחלט קטן מכל רציונלי חיובי.

x ו-y נקראים **סמוכים**, אנו כותבים $x \sim y$, אם הפרשם 0 או זעירון.

ל- $x, y \in S$ נכתוב $x << y$ אם $x < y$ ו-x, y אינם סמוכים.

קיימות העובדות הבאות:

א. x הוא זעירון אםם $\frac{1}{x}$ אינסופי.

ב. x הוא זעירון אםם $-x$ הוא זעירון.

ג. אם כל אחד מ- x,y הוא 0 או זעירון אז גם $x+y$ ו- $x-y$ הם כאלו.

ד. אם x הוא זעירון ו-z הוא סופי ואינו 0 אז גם zx הוא זעירון.

ה. הזעירונים ו-0 הם אידאל בתחום האיברים הסופיים, ולכן יחס הסמיכות הוא יחס שקילות על S שהחיבור והכפל באיברים הסופיים אדישים ביחס אליו.

ו. מחלקת שקילות של יחס הסמיכות היא רצף של מספרים.

ז. לכל x סופי ו-n טבעי קיימים רציונליים r,s כך ש- $r<<x<<s$ ו- $s-r<\frac{1}{n}$.

ח. לאיברים x,y סופיים של S קיים: $x<<y$ אםם קיימים רציונליים r,s כך ש- $x\le r<s\le y$, אםם קיימים רציונליים r,s כך ש- $x<r<s<y$.

ט. אם x,y איברים סופיים של S כך שלכל רציונלי r , פרט אולי לאחד, קיים $r<x$ אםם $r<y$ אז x,y קרובים. הוא הדין גם ל- $r>x$ אםם $r>y$.

י. אם x,y סופיים, r רציונלי וקיים $r<<x+y$ אז קיימים רציונליים s,t כך ש- $s<<x$, $t<<y$ ו- $r<s+t$.

י"א. אם x,y סופיים חיוביים, r רציונלי וקיים $0<r<<xy$ אז קיימים רציונליים s,t כך ש- $0<s<<x$, $0<t<<y$ ו- $r<st$.

הוכחה חלקית. ז. מכיוון ש-x סופי קיימים k,l שלמים כך ש- $k<<x<<l$. יהי i הטבעי המזערי כך ש- $x\le k+\frac{i}{4n}$. קיים לכן $k+\frac{i-2}{4n}<<x$ ו- $x<<k+\frac{i+1}{4n}$. נסמן $r=k+\frac{i-2}{4n}$ ו- $s=k+\frac{i+1}{4n}$, ואז r,s הם כנדרש.

ח. לכוון הלא טריביאלי השתמש ב-ו'.

י. יהי v רציונלי כך ש- $r<v<x+y$, יהי n כך ש- $\frac{2}{n}<v-r$. השתמש ב-ז' לקבל s ו-t רציונליים כך ש- $0<x-s<\frac{1}{n}$ ו- $0<y-t<\frac{1}{n}$.

4.7 הגדרה. א. נתבונן ביחסי שקילות בשדה סדור בהם כל מחלקת שקילות היא רצף של איברי השדה, כמו יחס הסמיכות. ליחס כזה נקרא **יחס קירבה**, כאשר יחס הסמיכות הוא דוגמה ליחס קירבה.

למחלקת שקילות של יחס הקירבה נקרא **מחלקת קירבה**, והיא כמובן רצף.

בהקשר של יחס קירבה מסויים נסמן ב- $x\sim y$ את ההיגד ש-x קרוב ל-y, וב- $x<<y$ את ההיגד ש- $x<y$ ו-x ו-y אינם קרובים.

ב. בסתם שדה סדור אין לנו כלים לייחד איבר מסויים במחלקת קירבה, אבל במספרי קונווי, מכיוון שמחלקת קירבה היא רצף, קיים במחלקת קירבה, לפי 2.38.1, מספר מוביל, שהוא המספר היחיד במחלקה שנברא לפני כל האחרים. את המספר המוביל במחלקה של x נסמן ב-$\mathrm{ld}(x)$ ונקרא לו **החלק המוביל** של x. למספר x שהוא מוביל במחלקה שלו נקרא **מספר מוביל**.

4.8 מספרים תיקניים. למספר x, המספרים הנמצאים בין שתי הקבוצות $\{x-r: r\in Q^+\}$ ו- $\{x+r: r\in Q^+\}$, היכן ש-Q^+ היא קבוצת הרציונלים החיוביים, הם בדיוק המספרים הסמוכים ל-x, לכן, לפי 2.38.1ב' המספר $\{x-r : r\in Q^+\} \mid \{x+r : r\in Q^+\}$ הוא החלק המוביל של x, שבמקרה של יחס הסמיכות הוא נקרא **החלק התיקני** של x והוא מסומן ב-$\mathrm{st}(x)$. לאור 2.38.1ב' אפשר לכתוב את החלק התיקני של x גם כ- $\{x-\frac{1}{n} \mid x+\frac{1}{n}\}$, היכן ש-$n$ עובר על הטבעיים החיוביים.

ב. מספר x נקרא **תיקני** אם הוא מספר מוביל בהקשר של יחס הסמיכות, כלומר אם $x=\mathrm{st}(x)$, ולחילופין אם $x=\{x-\frac{1}{n} \mid x+\frac{1}{n}\}$.

4.9 משפט. ליחס קירבה $\sim$ כלשהו קיים:

א. $x\sim y$ אםם $\mathrm{ld}(x)=\mathrm{ld}(y)$.

ב. לכל מספר x $x\sim\mathrm{ld}(x)$, $\mathrm{ld}(x)$ הוא מספר מוביל, והוא המספר המוביל היחיד הקרוב ל-x.

4.10 שדה סדור ומספרים ממשיים. א. **חתך** (במספרים הרציונליים) זה זוג $c=C_L\mid C_R$ היכן ש-C_L רישא ו-C_R סיפא לא ריקות של הרציונליים, C_L ו-C_R זרות ואחודן מכיל את כל הרציונליים, פרט אולי לרציונלי אחד. כל חתך c **קובע** את המספר הממשי $c^\flat=\sup C_L=\inf C_R$. כל הרציונליים הקטנים מ-$c^\flat$ נמצאים ב-C_L וכל הגדולים מ-$c^\flat$ נמצאים ב-C_R. אם $c^\flat$ רציונלי הוא יכול להיות ב-C_L או ב-C_R, אבל לא בשתיהן. לכן, אם x מספר רציונלי אז ישנם בדיוק שלושה חתכים c כך ש- $c^\flat=x$. אם c,d חתכים אז $c^\flat<d^\flat$ אםם $C_R\cap D_L$ מכילה לפחות שני איברים.

ב. כל איבר סופי x קובע את החתך $\{r \in Q : r < x\} \mid \{r \in Q : r > x\}$ ברציונליים וחתך זה קובע ממשי שנסמנו ב-$x^\flat$. ל-x, y סופיים $x^\flat < y^\flat$ אםם $x << y$. מזה נובע כי $x^\flat = y^\flat$ אםם x, y סמוכים.
ג. לכל x סופי ו-r רציונלי, אם $r < x$ אז $r \le x^\flat$, ואם $r < x^\flat$ אז $r < x$.
ד. ההעתקה $x \mapsto x^\flat$ היא הומומורפיזם של תחום האיברים הסופיים של S לתוך שדה הממשיים.

הוכחה חלקית. ב. השתמש ב-א׳ וב-4.6ז׳.
ד. השתמש ב-4.6י׳ ו-י״א.

מכיוון שאנו מזהים את הרציונליים עם האיברים המתאימים בשדה סדור כלשהו אנו מזהים אותם גם עם מספרי קונווי המתאימים, וכבר ראינו ב-2.50 כי כל מספר דיאדי נוצר ביום סופי. נגדיר עתה העתקה $^\#$ של שדה המספרים הממשיים למספרי קונווי ונוכיח שהיא שיכון. ברור כי הגבלת העתקה זאת לרציונליים היא השיכון היחיד של הרציונליים במספרי קונווי שכבר עסקנו בו קודם. אחרי שנוכיח כי ההעתקה $^\#$ היא שיכון נוכל לזהות כל מספר ממשי x עם מספר קונוויי $x^\#$.

4.11 המספרים הממשיים בשדה מספרי קונווי. תהי Q קבוצת המספרים הרציונליים ו-D קבוצת המספרים הדיאדיים. לכל מספר ממשי x נסמן $Q_{x,L} = \{r < x : r \in Q\}$, $Q_{x,R} = \{x < r : r \in Q\}$, $D_{x,L} = \{r < x : r \in D\}$, $D_{x,R} = \{x < r : r \in D\}$, $x^\# = D_{x,L} \mid D_{x,R}$. לפי 2.35ב׳ קיים גם $x^\# = Q_{x,L} \mid Q_{x,R}$.
א. ההעתקה $^\#$ היא העתקה שומרת סדר של המספרים הממשיים למספרי קונווי.
ב. לכל מספר ממשי x קיים ש-$x^\#$ הוא סופי ו- $x = (x^\#)^\flat$.

הוכחה. א. $^\#$ שומרת סדר, כי אם $x < y$ ממשיים יהי r מספר דיאדי כך ש- $x < r < y$ ואז $r \in D_{x,R}$, ו- $r \in D_{y,L}$ ולכן $x^\# < r < y^\#$.
ב. אם r רציונלי המקיים $r < x$ אז קיים רציונלי s כך ש- $r < s < x$, ואז $r < s < x^\#$ ואז $r < s \le \sup\{t < x^\# : t \in Q\} = (x^\#)^\flat$. כמו כן, אם $r > x$ אז $r > (x^\#)^\flat$.

4.12 משפט. א. לכל מספר ממשי x $x^\#$ הוא מספר תיקני.
ב. מספר סופי הוא תיקני אםם הוא ממשי.
ב. סכום ומכפלה של מספרים תיקניים הם מספרים תיקניים, ולכן המספרים התיקניים הם תחום שלמות.

הוכחה חלקית. א. $x^\#$ נמצא בין האופציות של $\mathrm{st}(x^\#) = \{x^\# - r : r \in Q^+\} \mid \{x^\# + r : r \in Q^+\}$, אבל אף אופציה של $x^\#$ אינה נמצאת בין האופציות הללו. למשל, אם $s \in Q_{x,L}$ אז קיים t כך ש- $s < t \in Q_{x,L}$, ומכיוון ש- $s + (t-s) = t < x^\#$ קיים $s < x^\# - (t-s) \le x^\# - \frac{1}{n}$ עבור $n \ge \frac{1}{t-s}$. לכן, לפי משפט הביניים $x^\# = \mathrm{st}(x^\#)$.
ב. אם x סופי אז, לפי 4.10ב׳, $x^\flat$ ממשי ולפי 4.12ב׳ $x^\flat = ((x^\flat)^\#)^\flat$. לפי 4.10ב׳ $(x^\flat)^\#$ ו-x סמוכים ומכיוון ששניהם תיקניים הם שווים, ולכן x ממשי.
ב. ראה הוכחת 4.3ה׳.

4.13 משפט. לכל x, y ממשיים $(x+y)^\# = x^\# + y^\#$ ו- $(xy)^\# = x^\# y^\#$, ולכן $^\#$ הוא שיכון של שדה הממשיים בשדה מספרי קונווי. לכן נזהה את הממשיים עם תמונותיהם בשיכון זה.

הוכחה חלקית. לפי 4.10ד׳ קיים $(x^\# + y^\#)^\flat = (x^\#)^\flat + (y^\#)^\flat$. לכן, לפי 4.11ב׳ $(x^\# + y^\#)^\flat = x + y = ((x+y)^\#)^\flat$. לפי 4.10ב׳ $x^\# + y^\#$ ו- $(x+y)^\#$ סמוכים, ומכיוון ששניהם תיקניים, לפי 4.12א׳, הם שווים.

ב-4.14 עד 4.2 נעסוק בתכונות של סודרים אשר לכשעצמן אינן קשורות עם מספרי קונווי. לכן בקטע זה יסמנו סימני החיבור והכפל את פעולות החיבור והכפל של הסודרים.

4.14 חזקת הסודרים. החזקה β^α של הסודרים מוגדרת ברקורסיה כדלקמן. $\beta^0 = 1$, אם $\alpha = \gamma + 1$ אז $\beta^\alpha = \beta^\gamma \cdot \beta$, ואם α גבולי אז $\beta^\alpha = \sup_{\gamma < \alpha} \beta^\gamma$.

4.15 למה. א. עבור $\alpha > 0$ ו- $\beta > 1$ קיים $\alpha \cdot \beta > \alpha$.
ב. אם $\beta > 1$ אז $\beta^{\alpha+1} > \beta^\alpha$.
ג. אם $\beta > 1$ אז β^α היא פונקציה עולה של α.
ד. אם $\beta > 1$ אז לכל α $\beta^\alpha \ge \alpha$.

4.16 למה. לכל $\beta > 0$ קיים α מירבי כך ש- $\omega^\alpha \le \beta$ וקיים $n > 0$ טיבעי מירבי כך ש- $\omega^\alpha \cdot n \le \beta$.

הוכחה. מכיוון $\beta < \beta + 1 \le \omega^{\beta+1}$ לכן קיים γ מזערי כך ש- $\beta < \omega^\gamma$. מכיוון ש- $\beta > 0$ $\gamma > 0$. γ אינו סודר גבולי כי ω^γ הגדול מ-β אינו יכול להיות הסופרמום של הסודרים ω^δ עם $\delta < \gamma$ כי כולם קטנים או שווים ל-β. לכן γ עוקב של סודר α, ו-α הוא כנדרש.

לפי בחירת α $\beta < \omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega$ ולכן קיים m סופי כך ש- $\beta < \omega^\alpha \cdot m$, וקיים $n \ge 1$ מירבי כך ש- $\omega^\alpha \cdot n \le \beta$.

4.17 פיתוח סודר על בסיס ω. לכל סודר β קיים k סופי, סידרה $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$ ומספרים טבעיים חיוביים $n_1, \ldots, n_k$ כך ש- $\beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$. הצגת β כסכום זה נקראת פיתוח β על בסיס ω.

הוכחה. באינדוקציה על β. ל- $\beta = 0$ $k = 0$. ל- $\beta > 0$ יהיו α ו-n כמו ב-4.16, ויהי γ כך ש- $\beta = \omega^\alpha \cdot n + \gamma$. לאור מירביות n $\gamma < \omega^\alpha \le \beta$. לפי הנחת האינדוקציה קיימים k, סידרה $\alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_k$ ומספרים טבעיים חיוביים $n_2, \ldots, n_k$ כך ש- $\gamma = \sum_{i=2}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$. נסמן $\alpha_1 = \alpha$ ו- $n_1 = n$ ואז $\beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$. קיים $\omega^{\alpha_2} \le \gamma < \omega^\alpha$ ולכן $\alpha_1 > \alpha_2$.

4.18 משפט. אם $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$ סודרים, $n_1, \ldots, n_k$ מספרים טבעיים ו- $\beta > \alpha_1$ אז $\omega^\beta > \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$.

הוכחה. לכל $1 \le i \le k$ $\alpha_i \le \alpha_1$ ולכן $\sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i \le \omega^{\alpha_1} \cdot \sum_{i=1}^k n_i < \omega^{\alpha_1} \cdot \omega = \omega^{\alpha_1+1} \le \omega^\beta$.

סימון. בכל פעם שנכתוב $\sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$ נתכוון לכך ש- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ סידרה יורדת של סודרים ו- $n_1, \ldots, n_k$ מספרים טבעיים. ה-n_i-ים יכולים גם להיות אפסים וברור שהוספת מחוברים כאלו אינה משנה את הסכום. לכן כאשר אנו עוסקים בבת אחת בפיתוחים של מספר סופי של סודרים על בסיס ω אנו יכולים להניח של הפיתוחים הם עם אותה סידרת חזקות $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

4.19 משפט. יהיו $\beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot m_i$ ו-$\gamma = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$. $\beta < \gamma$ אםם ל-i המזערי כך ש- $n_i \ne m_i$ קיים $m_i < n_i$.

הוכחה. יהי j המזערי כך ש- $m_j \ne n_j$. אם $m_j < n_j$ אז, לפי 4.18, $\beta = \sum_{i=1}^j \omega^{\alpha_i} \cdot m_i + \sum_{i=j+1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot m_i < \sum_{i=1}^j \omega^{\alpha_i} \cdot m_i + \omega^{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{j-1} \omega^{\alpha_i} \cdot m_i + \omega^{\alpha_j} \cdot (m_j + 1) \le \sum_{i=1}^{j-1} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i + \omega^{\alpha_j} \cdot n_j \le \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i = \gamma$
אם $n_j < m_j$ אז, בהיפוך התפקידים, $\beta > \gamma$. לכן הגרירה קיימת בשני הכוונים.

4.20 מסקנה. הפיתוח על בסיס ω של כל סודר (עם מקדמים חיוביים) הוא יחיד.

4.21 הסכום הטבעי. הסכום הטבעי $\beta\#\gamma$ מוגדר כך. אם $\beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot m_i$ ו- $\gamma = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$ אז $\beta\#\gamma = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n_i)$.

4.22. ברור מ-4.21 שפעולת הסכום הטבעי היא חילופית וקיבוצית, ו-0 הוא האיבר הנייטרלי שלה.

4.23 משפט. פעולת הסכום הטבעי היא מונוטונית בכל אחד מן הארגומנטים.

הוכחה. בגלל חילופיות הפעולה די להוכיח את המונוטוניות לאחד משני הארגומנטים. יהיו $\beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$, $\beta' = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n'_i$ ו- $\gamma = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot m_i$, ואז $\gamma + \beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n_i)$ ו- $\gamma + \beta' = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n'_i)$. אם $\beta < \beta'$ אז קיים j כך ש- $n_j < n'_j$ ולכל $1 \le i < j$ $n_i = n'_i$ לכן $m_j + n_j < m_j n'_j$ ולכל $1 \le i < j$ $m_i + n_i = m_i + n'_i$, ולפי 4.19 $\gamma + \beta < \gamma + \beta'$.

4.24 משפט. $\gamma\#\beta$ הוא הסודר המירבי של הקבוצות הסדורות היטב A שהן אחוד של שתי תתי קבוצות זרות B ו-C שהסודרים שלהן הם β ו-γ.

הוכחה. תחילה נוכיח כי לכל β, γ קיימת קבוצה A כמו במשפט שהסודר שלה הוא $\gamma\#\beta$. יהי $\beta = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot m_i$ ו- $\gamma = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$. עבור $1 \le i \le k$ תהי B_i קבוצה שטיפוס הסדר שלה הוא $\omega^{\alpha_i} \cdot m_i$ ו-C_i קבוצה שטיפוס הסדר שלה הוא $\omega^{\alpha_i} \cdot n_i$ ותהיינה כל הקבוצות B_i ו-C_i זרות הדדית. אז B, שהיא האחוד לפי הסדר של הקבוצות B_i, היא מטיפוס הסדר β, ו-C, שהיא האחוד לפי הסדר של הקבוצות C_i, היא מטיפוס הסדר γ. טיפוס הסדר של האחוד המסודר $B_i \cup C_i$ הוא לכן $\omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n_i)$ וטיפוס הסדר של האחוד המסודר של הקבוצות $B_i \cup C_i$ הוא $\sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n_i) = \beta\#\gamma$.

כעת נראה כי קבוצה A כמו במשפט אינה יכולה מטיפוס סדר גדול מ- $\gamma\#\beta$. נניח שיש A כזאת עם טיפוס סדר גדול מ- $\gamma\#\beta$, ואז ישנה רישא ממש A' של A שטיפוס הסדר שלה הוא $\gamma\#\beta$. מכיוון ש-A' רישא ממש של A היא מהצורה $B' \cup C'$ כאשר B', C' רישאות של B ו-C, ולפחות אחת מהן רישא ממש. יהיו β' ו-γ' הסודרים של B' ו-C', ואז $\beta' < \beta$ ו- $\gamma' \le \gamma$ או $\beta' \le \beta$ ו- $\gamma' < \gamma$. לפי הנחת האינדוקציה הסודר של $A' = B' \cup C'$ הוא לכל

היותר $\beta'\#\gamma'$ ולכן, כתוצאה ממונוטוניות $\#$, הוא קטן מ- $\beta\#\gamma$, בסתירה לבחירת A'.

4.25 למה. לכל $\delta \leq \beta + \gamma$ קיימים $\beta' \leq \beta$ ו- $\gamma' \leq \gamma$ כך ש- $\delta = \beta'\#\gamma'$.

הוכחה. יהי $\beta = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} \cdot m_i$ ו- $\gamma = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$ ואז $\beta\#\gamma = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n_i)$, ולכן $\delta = \sum_{i=1}^{l-1} \omega^{\alpha_i} \cdot (m_i + n_i) + \rho$, היכן ש- $1 \leq l \leq k$ ו- $0 \leq \rho \leq \omega^{\alpha_l} \cdot (m_l + n_l)$. אם $\rho \leq \omega^{\alpha_l} \cdot m_l$ נסמן $\beta' = \sum_{i=1}^{l-1} \omega^{\alpha_i} \cdot m_i + \rho$ ו- $\gamma' = \sum_{i=1}^{l-1} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$, ואז $\beta' \leq \sum_{i=1}^{l} \omega^{\alpha_i} \cdot m_i \leq \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} \cdot m_i = \beta$, $\gamma' \leq \gamma$, ומכיוון ש- $\rho \leq \omega^{l} \cdot m_i < \omega^{\alpha}_{l-1}$ לכן $\delta = \beta'\#\gamma'$. אם $\rho > \omega^{\alpha_l} \cdot m_l$ אז $\rho = \omega^{\alpha_l} \cdot m_l + \lambda$, ומכיוון ש- $\rho \leq \omega^{\alpha_l} \cdot (m_l + n_l)$ לכן $\lambda \leq \omega^{\alpha_l} \cdot n_l$. במקרה זה נסמן $\beta' = \sum_{i=1}^{l} \omega^{\alpha_i} \cdot m_i$ ו- $\gamma' = \sum_{i=1}^{l-1} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i + \lambda$. ברור כי $\beta' \leq \beta$ ומכיוון ש- $\lambda \leq \omega^{\alpha_l} \cdot n_l$ אז $\gamma' \leq \sum_{i=1}^{l} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i \leq \gamma$ ו- $\delta = \beta'\#\gamma'$.

4.26 משפט. לכל β, γ $\beta\#\gamma = \mathrm{Sup}\{\beta'\#\gamma, \beta\#\gamma' : \beta' < \beta, \gamma' < \gamma\}$, היכן שלקבוצה A של סודרים $\mathrm{Sup}A$ (עם S גדולה) $\mathrm{Sup}A$ הוא הסודר המזערי הגדול מכל איברי A.

הוכחה. לאור מונוטוניות $\#$ ברור כי $\beta\#\gamma \geq \mathrm{Sup}\{\beta'\#\gamma', \beta\#\gamma' : \beta' < \beta, \gamma' < \gamma\}$. נסמן $\delta = \mathrm{Sup}\{\beta'\#\gamma, \beta\#\gamma' : \beta' < \beta, \gamma' < \gamma\}$. אם $\delta < \beta\#\gamma$ אז, לפי 4.25 קיימים $\beta' \leq \beta$ ו- $\gamma' \leq \gamma$ כך ש- $\delta = \beta'\#\gamma'$, ומכיוון ש- $\delta < \beta\#\gamma$ קיים $\beta' < \beta$ או $\gamma' < \gamma$. לכן δ הוא אחד הסודרים המופיעים ב-Sup בסתירה לכך ש-δ הוא ה-Sup.

4.27 חיבור הסודרים כמספרי קונווי. לפי 4.26 הסכום הטבעי מקיים את ההגדרה הרקורסיבית של חיבור סודרים כמספרי קונווי, ולכן פעולת החיבור $+$ של מספרי קונווי מתלכדת על הסודרים עם פעולת הסכום הטבעי $\#$.

ברור כי אם $\alpha \geq \alpha'$ אז $\omega^{\alpha}\#\omega^{\alpha'} = \omega^{\alpha} + \omega^{\alpha'}$, היכן ש-$+$ היא פעולת החיבור הרגילה של הסודרים. מעובדה זאת, ומכך ש-1 היא היחידה הכפלית וחוק הפילוג קיים גם בסודרים וגם במספרי קונווי לכן השוויון $\beta = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$ קיים בסודרים אםם הוא קיים במספרי קונווי.