# מתמטיקה דיסקרטית
# פתרון תרגיל 10

1. הוכח ש $2\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r}=\frac{n+r}{n-r}\binom{n-1}{r}$

$2\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r}=\frac{2\cdot n!}{r!(n-r)!}-\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$ נחפש מכנה משותף

$$\frac{2\cdot n!}{r!(n-r)(n-r-1)!}-\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}=\frac{2\cdot n!-(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}=$$

$$=\frac{2\cdot n(n-1)!-(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{(n-1)!(2n-n+r)}{r!(n-r)!}=\frac{(n-1)!(n+r)}{r!(n-r)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!(n+r)}{r!(n-r)(n-r-1)!}=\frac{(n+r)}{(n-r)}\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n+r}{n-r}\binom{n-1}{r}$$

2. "לצערכם", קיימת המילה "MISSISSIPPI" בשפה האנגלית.

א) כמה מילים באותו הגודל ניתן להרכיב על ידי שימוש בכל האותיות של המילה הנ"ל?
נפרק לקבוצות דומות על פי האותיות:

$$k_1=\{|M|=1\}\cap k_2=\{|I|=4\}\cap k_3=\{|S|=4\}\cap k_4=\{|P|=2\}$$

מילים $\Leftarrow$ חשוב הסדר

שימוש בכל האותיות לאותו הגודל $\Leftarrow$ ללא חזרות

לכן חליפה עם צירופים! $P(11,k_1,k_2,k_3,k_4)=\frac{11!}{1!*4!*4!*2!}=34,650$

ב) כמה מילים באותו הגודל ניתן להרכיב על ידי שימוש בכל האותיות של המילה הנ"ל, וכל אותיות ה"I" צמודות יחדיו?
אותו הדבר רק שבמקרה זה ניתן להכליל את ארבעת ה"I"-ים ל"אות" אחת וכעת יש להרכיב מילה באורך 8 אותיות (I אחד במקום ארבעה) ואז $840=\frac{8!}{1!*1!*4!*2!}$

3. בשכבת כיתות ו' בביה"ס היסודי "בכי לדורות" ישנם 41 תלמידים ו38 תלמידות. התברר ש 21 תלמידים מחבבים (מאד!) את חוה מכיתה ו'2, 24 מהתלמידים מסמפתים את זיוה מכיתה ו'1 ו 21 תלמידים מאוהבים (...זה הגיל) בבת-שבע, מלכת הכיתה של ו'2, ורוצים להציע לה חברות. מתוך כלל התלמידים הבנים 18 אוהבים גם את חוה וגם את זיוה, 12 – את חוה ואת בת-שבע ו 10 – את זיוה ואת בת-שבע. 3 תלמידים רוצים את כל שלושת הבנות המקובלות בשכבה. מהו מספר התלמידים (הבנים) שכלל לא מתרגשים מאופיין ויופיין של חוה, זיוה ובת-שבע ?

נסמן: מדובר בתלמידים בנים ולכן מספרם הוא המעניין, כלומר, סה"כ $|U|=41$

$A\leftarrow$ רגשות עמוקים לחוה $|A|=21$

$B\leftarrow$ רגשות עמוקים לזיוה $|B|=24$

$C\leftarrow$ רגשות עמוקים לבת-שבע $|C|=21$

ואז $|A\cap B\cap C|=3,|B\cap C|=10,|A\cap C|=12,|A\cap B|=18$

צריך למצוא את $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=?$

על פי דה-מורגן $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|$

והרי $|\overline{A\cup B\cup C}|=|U|-|A\cup B\cup C|$

ואז נותר להציב:
$$41-[21+24+21-(18+10+12)+3]=$$
$$=41-[66-40+3]=41-29=12$$

4. בחברת ההלוואות "אופטימיות זהירה" דובל'ה הבוס רוצה לחלק את רווחי היום בין חמשת עובדיו השריריים והאינטליגנטיים. את הרוב הוא שומר לעצמו אך מקצה 80 שקלים חדשים לחמשת עובדיו להעלאת המוטיבציה. כמה דרכים יש לדובל'ה לחלק את הממון בין עובדיו כך שכל עובד יקבל לכל היותר 24 שקלים חדשים (...שלא יעלה להם לראש)?
השאלה למעשה כמה "אחדים" (שקלים חדשים) ניתן להציב בכל תא $x$ (עובד שרירי ואינטליגנט חסר שם) ולא משנה איזה "אחדים". ניתן לתרגם את השאלה ל 80 כדורים זהים שמכניסים ל 5 תאים ואז:
שקלים חדשים $\Leftarrow$ לא חשוב הסדר
כל עובד יכול לקבל מספר שקלים חדשים: $x_i \ge 0$ $\Leftarrow$ יש חזרות
לכן צירוף עם חזרה!
ואז בעצם השאלה: כמה פתרונות בשלמים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=80$
כאשר $x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5$, אבל גם $x_i \le 24, i=1,2,3,4,5$
סה"כ אפשרויות ללא מגבלות $V(5,80)$
כעת ניצור קבוצות המייצגות את העובדים כך שלעובד ה-i יש לפחות 25 שקלים ובשאר אין הגבלה $A_i=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right) \mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=80, x_i \ge 25, x_{j\ne i} \ge 0\right\}$
ניתן 25 שקלים לעובד ה-i ונשארו 55 שקלים. כלומר $\left|A_i\right|=V(5,55)$. יש 5 עובדים ולכן $\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\left|A_3\right|+\left|A_4\right|+\left|A_5\right|=5*V(5,55)$.
עבור זוגות שונים של עובדים: $1 \le i \ne j \le 5$
$$A_i \cap A_j=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right) \mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=80, x_i \ge 25, x_{j\ne i} \ge 25, x_{k\ne j\ne i} \ge 0\right\}$$
ניתן 25 שקלים לעובד ה-i וניתן 25 שקלים לעובד ה-j, ונשארו 30 שקלים. כלומר $\left|A_i \cap A_j\right|=V(5,30)$. מספר הזוגות הוא קומבינציה (בחירת 2 מתוך 5-1 בלי חשיבות לסדר וללא חזרות) ולכן ס"כ הזוגות $C(5,2)$. כלומר סכום כלל הזוגות הוא $C(5,2)*V(5,30)$.
עבור שלשות שונות של עובדים: $1 \le i \ne j \ne k \le 5$
$$A_i \cap A_j \cap A_k=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right) \mid ..., x_i \ge 25, x_{j\ne i} \ge 25, x_{k\ne j\ne i} \ge 25, x_{l\ne k\ne j\ne i} \ge 0\right\}$$
ניתן 25 שקלים לעובד ה-i, ניתן 25 שקלים לעובד ה-j וניתן 25 שקלים לעובד ה-k, ונשארו 5 שקלים. כלומר $\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|=V(5,5)$. מספר השלשות הוא קומבינציה (בחירת 3 מתוך 5-1 בלי חשיבות לסדר וללא חזרות) ולכן ס"כ השלשות $C(5,3)$. כלומר סכום כלל השלשות הוא $C(5,3)*V(5,5)$.
עבור רביעיות שונות של עובדים: $1 \le i \ne j \ne k \ne l \le 5$
$$A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l=\left\{(...) \mid ..., x_i \ge 25, x_{j\ne i} \ge 25, x_{k\ne j\ne i} \ge 25, x_{l\ne k\ne j\ne i} \ge 25, x_{r\ne l\ne k\ne j\ne i} \ge 0\right\}$$
ניתן 25 שקלים לעובד ה-i, ניתן 25 שקלים לעובד ה-j וניתן 25 שקלים לעובד ה-k, ונשארו 5 שקלים לעובד ה-r. לכן $\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r\right|=0$.
סה"כ $$\underbrace{V(5,80)}_{\text{הכל}}-[\underbrace{5*V(5,55)}_{\text{היחידים}}-\underbrace{C(5,2)*V(5,30)}_{\text{הזוגות}}+\underbrace{C(5,3)*V(5,5)}_{\text{השלשות}}]=116,371$$

5. כמה פתרונות בשלמים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$ כאשר $x_i \ge i \cap i=1,2,3,4,5$ ?

נגדיר $y_i = x_i - i \geq 0 \cap i = 1,2,3,4,5$. נציב

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 + x_5 - 5 =$$
$$= \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}_{28} - 15 = 28 - 15 = 13$$

ולכן סה"כ $V(5,13) = \frac{17!}{13!4!} = 2380$.

6. בכמה מספרים קטנים מ-1,000,000 סכום הספרות הוא (אין סכימה נוספת לאחר הראשונה. כלומר, אם לאחר סכימה אחת התוצאה 17, לדוגמא, אז לא נספר כאפשרות):

א) 8

ניתן לתרגם השאלה לכמה פתרונות בשלמים עבור

$x_1$ – ספרת האחדות

$x_2$ – ספרת העשרות

$x_3$ – ספרת המאות

$x_4$ – ספרת האלפים

$x_5$ – ספרת עשרות האלפים

$x_6$ – ספרת מאות האלפים

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$ כאשר $0 \leq x_i \leq 9 \cap i = 1,2,3,4,5,6$

אין ל $x_i$ יכולת להפר את המגבלה של עד ל 9 כי הכי הרבה יתכן 8. לכן $V(6,8)$.

ב) 9

ניתן לתרגם השאלה לכמה פתרונות בשלמים עבור

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$ כאשר $0 \leq x_i \leq 9 \cap i = 1,2,3,4,5,6$

אין ל $x_i$ יכולת להפר את המגבלה של עד ל 9 וכולל כי הכי הרבה יתכן 9. לכן $V(6,9)$.

ג) 10

ניתן לתרגם השאלה לכמה פתרונות בשלמים עבור

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$ כאשר $0 \leq x_i \leq 9 \cap i = 1,2,3,4,5,6$

יש ל $x_i$ יכולת להפר את המגבלה של עד ל 9 אם יכיל 10 אחדות. לכן נגדיר את כל האפשרויות פחות המקרים האסורים. כל האפשרויות זה $V(6,10)$.

המקרים האסורים:

$$A_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10 \\ x_1 \geq 10, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$z_1 = x_1 - 10 \geq 0$$

$$z_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = x_1 - 10 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 =$$
$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}_{10} - 10 = 0$$

כלומר, גודל הקבוצה הוא $V(6,0) = \frac{5!}{0!*5!} = 1$ (הגיוני שיש רק פתרון אחד). כך גם עבור הקבוצות $A_6, A_5, A_4, A_3, A_2$.

בחיתוך 2 קבוצות נקבל מספר שלילי כלומר קבוצות נפרדות ולכן סה"כ

$$V(6,10) - 6*1 = \frac{15!}{10!5!} - 6 = 2997$$

ד) 8 לכל היותר

כלומר, יכול להיות סה"כ 0 או 1 או 2 או 3 או 4 או 5 או 6 או 6 או 7 או 8.

בדומה לסעיפים א' וב' נקבל

$$V(6,0)+V(6,1)+V(6,2)+V(6,3)+V(6,4)+$$
$$+V(6,5)+V(6,6)+V(6,7)+V(6,8)$$