

מתמטיקה דיסקרטית, תשובות לתרגיל 1

1. הוכח באמצעות אינדוקציה כי $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 8n = 4n(4n + 1)$

בדיקה עבור $n=1$:

$$2 + 4 + 6 + 8 = 4(4 + 1)$$

בדיקה עבור $n+1$:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 8n + (8n + 2) + (8n + 4) + (8n + 6) + (8n + 8) = 4(n + 1)(4(n + 1) + 1)$$

לפי הנחת האינדוקציה $4n(4n + 1)$

$$4n(4n + 1) + (8n + 2) + (8n + 4) + (8n + 6) + (8n + 8) = (4n + 4)(4n + 5)$$

$$4n(4n + 1) + 32n + 20 = 16n^2 + 36n + 20 \quad \square$$

2. הוכח באמצעות אינדוקציה כי $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$

בדיקה עבור $n=1$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

בדיקה עבור $n+1$:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{(2n + 1)}{(2n + 2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 3}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$$

לפי הנחת האינדוקציה

נפתח את צד שמאל:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{(2n + 1)}{(2n + 2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}} \cdot \frac{(2n + 1)}{(2n + 2)} = \frac{\sqrt{2n + 1}}{(2n + 2)}$$

צריך להוכיח:

$$\frac{\sqrt{2n + 1}}{(2n + 2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 3}}$$

נחשב מכנה משותף:

$$\sqrt{2n + 1} \sqrt{2n + 3} \leq 2n + 2$$

$$\sqrt{4n^2 + 8n + 3} \leq 2n + 2$$

$$4n^2 + 8n + 3 \leq (2n + 2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$$

$$3 \leq 4 \quad \square$$

3. איזו קבוצה גדולה יותר: \mathbb{N} , או $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$

כאשר יש 2 קבוצות עם אינסוף איברים, על מנת לבדוק האם עוצמה של קבוצה אחת גדולה מהשניה מנסים למצוא פונקציה שתתאים לכל איבר מקבוצה אחת איבר לקבוצה השניה. אם נמצא התאמה שיכולה להתאים לכל איבר מהקבוצה הראשונה איבר מהקבוצה השניה, אך ישארו אינסוף איברים בקבוצה השניה ללא "איבר תואם" בקבוצה הראשונה, סימן שעוצמת הקבוצה השניה גדולה מעוצמת הקבוצה הראשונה. במקרה זה, ננסה למצוא לכל איבר ב \mathbb{N} איבר ב A , ע"י חישוב האיבר ההופכי, כלומר אחד חלקי. נוותר על האיבר הראשון, 1, מפני ש 1 אינו מופיע ב A . נתחיל מ 2:

$$2 \rightarrow 1/2$$

$$3 \rightarrow 1/3$$

$$4 \rightarrow 1/4$$

:

$$n \rightarrow 1/n$$

ל 1 ניתן לתת התאמה פרטית למספר אחר, למשל מספר כלשהו בין 1 ל 0.5. כלומר ישנם אותו מספר איברים בקבוצה \mathbb{N} ו $B = \{1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$, כאשר $B \subset A$, אך ניתן לראות שבין כל שני איברים ב B קיימים אינסוף איברים ב A . כלומר מצאנו שלכל איבר ב \mathbb{N} יש איבר מתאים ב A , אך יש עוד אינסוף איברים ב A ללא התאמה ב \mathbb{N} . כלומר העוצמה של \mathbb{N} קטנה מהעוצמה של A . למי שמתעניין, מדובר בסוגים שונים של אינסוף. ניתן לקרוא על כך ב: <http://en.wikipedia.org/wiki/Infinity>, תחת הכותרת "set theory", וסיכום קצרצר בגרסה העברית.

4. הסבר את הבעייתיות בהוכחה באמצעות אינדוקציה. הבעיה נובעת ממה שנקרא הקפיצה האינדוקטיבית. במדע, כאשר אנו מנסים למצוא חוקיות בטבע, יש לנו תמיד מספר סופי של תצפיות, על פיהן אנו מנסים להכליל חוק. תהליך זה נקרא קפיצה אינדוקטיבית, משום שממספר סופי של תצפיות (n), אנו מנסים למצוא חוק שיסביר כל תצפית אפשרית (n+1, n+2...). להלן דוגמה לצרות שיכולות להיגרם משימוש לא זהיר באינדוקציה: http://en.wikipedia.org/wiki/All_horses_are_the_same_color_%28paradox%29