בקבוצה של ששון
לא פותרו כל התרגילים
ולכן שימו לב על
אי-דיוקים שבגלל
התרגול
עמכם הסליחה!

תרגילים באינטגרלים מוכללים (30/04)

1. בתרגילים הבאים להוכיח כי אינטגרלים מתכנסים עבור תחומים של p

א. $\int_1^\infty e^{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x}{x^p}$ מתכנס עבור $p>0$.

פתרון: לפי מבחן דיריכלה:

$f(x)=e^{\sin x}\sin 2x \quad ; \quad g(x)=\frac{1}{x^p}$

בתנאי $p>0$ $g(x)$ מונוטונית יורדת וגם $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b e^{\sin x}\sin 2x\,dx\right| = \left[\substack{\text{הצבה}\\ \sin x=t}\right] = 2\left|\int_a^{\sin b} e^t\cdot t\,dt\right| \le$$

$$\le 2\int_a^1 e^t\cdot t\,dt < 2e = K$$ ← חסום

← תנאי משפט דיריכלה מתקיימים ⇐ מ.ש.ל.
עבור $p>0$.

ב. להוכיח כי $\int (\ln x)^p\cdot\frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס עבור $p>0$

פתרון:

לפי מבחן דיריכלה $f(x)=\sin x$ $\quad g(x)=\frac{(\ln x)^p}{x}$

$\left|\int \sin x\,dx\right|$ חסום

נבדוק כי $g(x)$ מונוטונית יורדת ו $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$

$$g'(x)=\frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2}\cdot(p-\ln x) \Rightarrow$$ פונק' יורדת $g'(x)<0$

עבור $\underline{x>e^p}$ $\quad (g'(x)<0)$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ לפי לופיטל.

⇐ מ.ש.ל.

2. $\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^p} + \int_1^\infty \frac{\sin x^2}{x^p}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p}}$$

עבור $x\to 0$ $\sin(x^2)\sim x^2$ ⇐ נשווה את האינטגרל הנ"ל

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} \sim \int_0^1 \frac{x^2}{x^p} = \int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}} \to$$ מתכנס כאשר $p-2<1$

⇐ $\boxed{p<3}$

האינטגרלים חברים $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-2}}}=1$

~~$\int^{\infty}$~~ מה $\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{2\, t^{\frac{p+1}{2}}}\,dt \Leftarrow \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ (x^2)^{\frac{p+1}{2}} \to t^{\frac{p+1}{2}} \end{bmatrix}$$ הצבה

האינטגרל מתכנס עבור $\frac{p+1}{2} > 0$ לפי דירכלה

$f(x) = \sin x$ $\left|\int f(x)dx\right|$ חסום

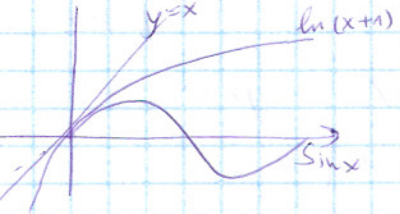
$\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}$ מונוטונית יורדת עבור $\frac{p+1}{2} > 0$

$\Leftarrow$ $\underline{\underline{p > -1}}$

האינטגרל מתכנס עבור $\boxed{-1 < p < 3}$

(ב) $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}\,dx$

בסביבה 0 $\sin x \sim \ln(x+1) \sim x$



נשווה $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}$

ו- $\int_0^1 \frac{x^2}{x^p} = \int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}}$

האינטגרלים חברים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x \ln(x+1)}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow{\text{לופיטל}} 1$

$\Leftarrow$ $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}}$ מתכנס עבור $p-2 < 1 \Leftarrow$

$\boxed{p<3}$

נוכיח כי $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}$ מתכנס עבור $\boxed{p>0}$

לפי מבחן דירכלה:

$f(x) = \sin x$ $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^p}$

$$g'(x) = \frac{\frac{x^p}{x+1} - p x^{p-1}\ln(x+1)}{x^{2p}} = \frac{\frac{x}{x+1} - p\ln(x+1)}{x^{p+1}} < 0$$

מונוטונית יורדת עבור p חיוביים

$\boxed{0 < p < 3}$ תחום של p ~~כך~~ שהאינטגרל מתכנס

$$\int_0^\infty \frac{arctg\,x}{x^p}\,dx =$$

בעיה ב $x=0$.

$$= \int_0^1 \frac{arctg\,x}{x^p}\,dx + \int_1^\infty \frac{arctg\,x}{x^p}\,dx$$

$arctg\,x \sim x \Leftarrow (x \to 0) \qquad \Leftarrow \int_0^1 \frac{arctg\,x}{x^p}\,dx$

נשווה ל- $\int_0^1 \frac{x}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}dx$ מתכנס עבור $p-1<1 \Leftrightarrow \boxed{p<2}$

$\Leftarrow \int_1^\infty \frac{arctg\,x}{x^p}\,dx$ $\quad arctg\,x$ פונק' חסומה ע"י $\frac{\pi}{2}$

נשווה ל- $\int_1^\infty \frac{arctg\,x}{x^p} \le \int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{x^p}$

(שים לב: ניתן להשתמש במבחן ההשוואה אך ורק מכיוון ש- $arctg\,x$ בתחום $[1,\infty)$ חיובית)

$\int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{x^p}$ מתכנס עבור $\boxed{p>1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{arctg\,x}{x^p}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^p}} \underset{arctg\,x \to \frac{\pi}{2}}{\overset{x\to\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{arctg\,x}{\frac{\pi}{2}} = 1$$ גבולים חברים

מסקנה $\int_0^1 \frac{arctg\,x}{x^p}$ מתכנס עבור $\boxed{1<p<2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^p \, dx$$

אם $p=0$ אינטגרל מתכנס $\int_0^{\pi} 1 \, dx$.

עבור $p<0$ עבור $\underline{x \to 0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^p = 1 \qquad (tgx)^p \sim x^p$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^p$ מתכנס $\iff p>-1$

עבור $p>0$ עבור $x \to \frac{\pi}{2}$

$$(tgx)^p \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{tgx}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}\right)^p = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}\right)^p =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = 1$$

1 הגלים חקרים

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p}\,dx$ מתכנס $\iff p<1$

אז $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^p$ מתכנס $\iff |p|<1$.

∞