

אלגברה ליניארית

דוקטור מירב טופול

א. נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאו: 1. $A^2 - 3E$ 2. $5E - BC$ 3. BD 4. D^{-1} 5. A^{-1}

ב. פתור מערכות של משוואות ליניאריות הבהאות ע"י מטריצה הפוכה:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 3y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -4 \\ -x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x + y - 3z = 2 \\ 2x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

תשובות

$$\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -18 & 13 \\ -25 & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -7 & 1 & -7 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 3/5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/7 & 4/7 \\ 3/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

א. 1. $x = 1; y = -1; z = 0$ 2. $x = -2; y = 1; z = 1$ 3. $x = 1; y = 1; z = 1$

בהצלחה!!!

עבודה ללא פתרונות (עבודה עצמית):

1. נתונות מטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. מצא:

$$M = 2A - 3B + C \quad 1.1$$

$$K = 2AB - 3CA \quad 1.2$$

$$L = \frac{ABC}{3} \quad 1.3$$

$$F = BA - AB \quad 1.4$$

$$H = 3I_2 - C \quad 1.5$$

1.6. כאשר $A - 3X = BC$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

2. נתונות מטריצות:

$$E = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

אילו מהפעולות הבאות מתקיימות:

$$-2A \quad 2.1 \quad B - 2A \quad 2.2 \quad AC \quad 2.3 \quad CD \quad 2.4 \quad B + 3E \quad 2.5 \quad CE \quad 2.6$$

3. בצע את הפעולות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 3.3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \quad 3.2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 \quad 3.1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3.5 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3.4$$

4. מטריצות A ו-B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$. מצא את כל המטריצות $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

המתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. נתון $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. מצא את כל הערכים של פרמטר k כך ש-
 $AB = BA$.

6. נתונות מטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
 בדוק כי $AB = AC$, אך $B \neq C$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, מצא את מטריצה $B \neq 0$ (2×2) כך ש- $AB = 0$.

8. הראה כי $AB \neq BA$ בעזרת הדוגמה. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

9. עבור A ו-B חשב A^2 , B^2 , A^T , B^T , $(AB)^T$, $A^T B^T$, $B^T A^T$, $(A+B)^T$, $A^T + B^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

10. בדוק האם המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מקיימת את המשוואה

$$X^2 - (a+d) \cdot X + (ad - bc) \cdot I = 0$$

כאשר $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

האם מתקיים השוויון $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. הוכח א. $AC = A$, ב. $CA = C$.

לאילו ערכים של פרמטר k יש למערכות הבאות:

- (א) פתרון יחיד (מצא אותו!)
 (ב) אינסוף פתרונות (מצא פתרון כללי!)
 (ג) אין פתרון

$$\begin{cases} kx + y + z = 2k \\ x + y - z = -2 \\ k^2x + ky + 2z = 4 \end{cases} .18 \quad \begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases} .17 \quad \begin{cases} 2x - y + 2kz = 0 \\ kx + (1-k) \cdot y + z = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \end{cases} .16$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + (k+1) \cdot y + 2z = 3 \\ x + 2y + (k+1) \cdot z = 2 \end{cases} .21 \quad \begin{cases} x - 3z = -3 \\ ky + 5z = 4 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases} .20 \quad \begin{cases} x + ky + z + 2t = 1 \\ y + kz - t = k \\ 2x + y + kz + t = 1 \end{cases} .19$$

$$\begin{cases} x + 2ky + 2z = 1 \\ 2x + 2ky - z = -2 \\ x + 2y + 2kz = 1 \end{cases} .23 \quad \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ (k+1) \cdot x + (k+1) \cdot y + 2z = 2 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} .22$$

23. א. האם מטריצות הבאות הפיכות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} .23.3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} .23.2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix} .23.1$$

ב. עבור מטריצות הפיכות מהסעיף הקודם מצא את מטריצות הפיכות המתאימות.