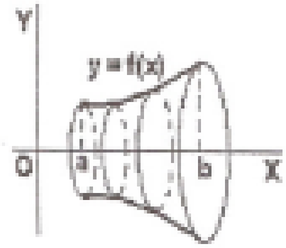
חישוב נפחים בעזרת אינטגרל מסוים

א) נפח V *של גוף המתקבל על-ידי סיבובו סביב ציר ה-* x *של השטח החסום בין הקו* $y = f(x)$ *ובין ציר ה-* x *בקטע* $[a, b]$*, מחשבים לפי הנוסחה:*

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$$

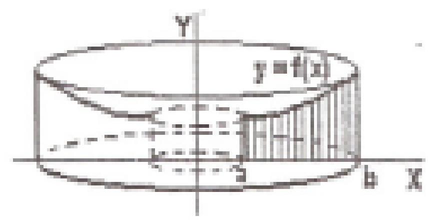


א') נפח V *של גוף המתקבל על-ידי סיבובו סביב ציר ה-* x *של השטח החסום בין הקווים* $y = f(x)$ *ו-* $y = g(x)$ *בקטע* $[a, b]$*,* $(f(x) \le g(x))$ *מחשבים לפי הנוסחה:*

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x) \right] dx$$

ב) נפח V *של גוף המתקבל על-ידי סיבובו סביב ציר ה-* y *של השטח החסום בין הקו* $y = f(x)$ *ובין ציר ה-* x *בקטע* $[a, b]$*, מחשבים לפי הנוסחה:*

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

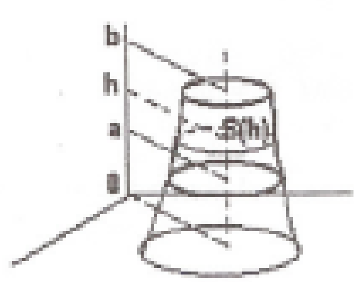


ב') נפח V *של גוף המתקבל על-ידי סיבובו סביב ציר ה-* y *של השטח החסום בין הקווים* $y = f(x)$ *ו-* $y = g(x)$ *בקטע* $[a, b]$*,* $(f(x) \le g(x))$ *מחשבים לפי הנוסחה.*

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \left[g(x) - f(x) \right] dx$$

ג) אם ידוע שטח $S(h)$ ***של החתך האופקי*** *(אשר מעבירים בגובה* h*)* ***של הגוף אז נפח של חלק הגוף הנמצא בין החתכים*** $h = a$ ***ו-*** $h = b$ ***שווה ל-***

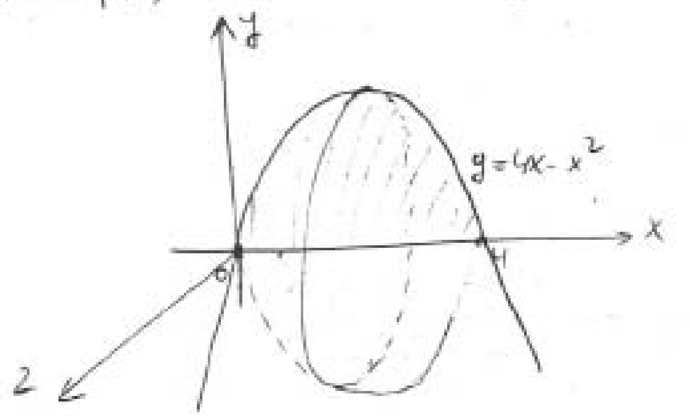
$$V = \int_a^b S(h) \cdot dh$$



תרגילים פתורים:

.1

תרגיל: מצא נפח של הגוף ~~החסום ע"י~~ המתקבל ע"י סיבוב של $y=4x-x^2$ סביב OX $(x\in[0,4])$.



פתרון:

$$V=\pi\int_0^4\left(4x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(16x^2-8x^3+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\cdot\left[\frac{16}{3}x^3-\frac{8}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\Big|_0^4\right]=$$

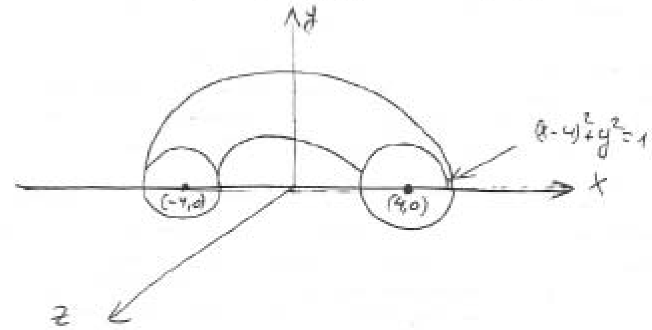
$$=\pi\cdot\left[\frac{4^5}{3}-4^4\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 4^5\right]=$$

$$=4^5\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{512}{15}\pi$$

$$\frac{10-15+6}{30}=\frac{1}{30}$$

.2

תרגיל: חשב את נפח הטורוס ("בייגלה") המתקבל ע"י סיבוב העיגול $(x-4)^2+y^2\le 1$ סביב ציר ה- y:



פתרון: נוכל לתאר את העיגול הנתון S כתחום מישורי החסום בין:

$$f(x) = -\sqrt{1-(x-4)^2}$$
$$g(x) = \sqrt{1-(x-4)^2}$$

כאשר $3 \le x \le 5$

עפ"י נוסחה אחרונה:

$$V = 2\pi \int_3^5 x\left[\sqrt{1-(x-4)^2}\cdot 2\right]dx =$$

$$= 4\pi \int_3^5 x\sqrt{1-(x-4)^2}\,dx = \begin{bmatrix} u=x-4 \\ du=dx \\ x=3 \Rightarrow u=-1 \\ x=5 \Rightarrow u=1 \end{bmatrix} =$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1}(u+4)\cdot\sqrt{1-u^2}\,du = \underbrace{4\pi\int_{-1}^{1} u\sqrt{1-u^2}\,du}_{} +$$

$$+16\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du =$$

$f(u) = u\sqrt{1-u^2}$
היא אי-זוגית לכן
על קטע סימטרי
האינטגרל שלה מתאפס

$$= 16\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du = \begin{bmatrix} u=\sin t \\ du=\cos t\,dt \ ; \ t=\arcsin u \\ u=-1 \Rightarrow t=-\frac{\pi}{2} \ ; \ u=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt =$$

$$= 16\pi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,dt + 8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt =$$

$$= 8\pi t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4\pi\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2 + 4\pi^2 = 8\pi^2$$

3. מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום הנתון סביב ציר ה - x :

א. התחום החסום ע"י $y=\sqrt{\cos x}, x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{2}, y=0$

ב. התחום החסום ע"י $y=\sqrt{x}, y=x$

פתרון:

א. $y=\sqrt{\cos x}, x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{2}, y=0$

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx=\pi\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ב. $y=\sqrt{x}, y=x$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2 dx-\pi\int_0^1 x^2dx=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

4. מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום הנתון סביב ציר ה - y :

a. התחום החסום ע"י $y=x^2, x=y^2$

b. התחום החסום ע"י $x=1-y^2, x=2+y^2, y=-1, y=1$

a.

$$y=x^2, x=y^2$$
$$x^4=x$$
$$x\left(x^3-1\right)=0$$
$$x_1=0, x_2=1$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2 dy-\pi\int_0^1\left(y^2\right)^2 dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$$

b. $x=1-y^2, x=2+y^2, y=-1, y=1$

$$V=\pi\int_{-1}^1\left(2+y^2\right)^2 dy-\pi\int_{-1}^1\left(1-y^2\right)^2 dy$$
$$=\pi\int_{-1}^1\left(4-4y^2+y^4\right)dy-\pi\int_{-1}^1\left(1-2y^2+y^4\right)dy$$
$$=\pi\left(4y+\frac{4}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1-\pi\left(y-\frac{2}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1$$
$$=2\pi\left(4+\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)-2\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=2\pi\left(3+2\right)=10\pi$$

בהצלחה! אושרית ☺