

פתרונות למבחן בקורס: מתמטיקה לכימאים ב'

מועד ב', תש"ע

מרצה: דוקטור מירב טופול

1.ב. מצאו ערך מקסימאלי וערך מינימאלי של הפונקציה $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$

בתחום שהוא המלבן שצלעותיו הן $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$, $1 \leq x \leq 3$.

פתרון: הערכים המקסימליים של הפונקציה הינם: $\max = 4$, $\min = \frac{3}{\sqrt{2}}$

2. חשבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ תחת האילוץ $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$.

פתרון: נקודת הקיצון הינה: $(0.9, 2.7)$

3. חשבו את האינטגרל הכפול הבא: $\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} ye^{xy} dx dy$

פתרון: תוצאת האינטגרל הינה $e - 1$

4. חשבו את האינטגרל המשולש $\iiint_A x^2 dA$ כאשר A הינו התחום החסום

$$A = \{x, y, z \mid 0 \leq z \leq 2, \sqrt{z} \leq y \leq 2\sqrt{z}, 2z \leq x \leq 3z\}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \iiint_A x^2 dA &= \int_0^2 \int_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} \int_{2z}^{3z} x^2 dx dy dz = \int_0^2 \int_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{2z}^{3z} dy dz = \int_0^2 \int_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} \left[\frac{27z^3}{3} - \frac{8z^3}{3} \right] dy dz = \\ &= \int_0^2 \int_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} \left[\frac{19z^3}{3} \right] dy dz = \int_0^2 \left[\frac{19z^3 y}{3} \right]_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} dz = \int_0^2 \left[\frac{38z^3 \sqrt{z}}{3} - \frac{19z^3 \sqrt{z}}{3} \right] dz = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{19z^3 \sqrt{z}}{3} \right] dz = \left[\frac{19z^4 \sqrt{z}}{13.5} \right]_0^2 = 31.85 \end{aligned}$$

5. מצאו את ערכי k שעבורם למערכת המשוואות הבאה : $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y - 3z = k + 2 \\ (k^2 - 4)x + 2y = -5 \end{cases}$ יש

א. פתרון יחיד, ב. אין פתרון, ג. אינסוף פתרונות.

פתרון: א. פתרון יחיד עבור $k \neq \pm 3$
 ב. אין פתרון עבור $k = -3$
 ג. אינסוף פתרונות עבור $k = 3$

6. פתרו את מערכת המשוואות הליניארית הבאה ע"י מטריצה הפוכה:

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -4 \\ -x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

פתרון: פתרון המערכת הינו: $x = -2; y = 1; z = 1$

7. שאלת בונוס (5 נקודות): חשבו את $\sqrt[3]{\frac{1+2i}{2+3i}}$.

פתרון: נכתוב בצורת מספר מרוכב: $\sqrt[3]{\frac{1+2i}{2+3i}} = \sqrt[3]{\frac{8}{13} + \frac{i}{13}}$

נהפוך לצורה טריגונומטרית $r = \frac{\sqrt{65}}{13}, \text{tg}(\alpha) = \frac{1}{8}$

וכעת שלושה שורשים: $k = 0, 1, 2$: $\left(\frac{\sqrt{65}}{13}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right)$

בהצלחה רבה!!!