

גבולות חשובים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$$

מציאת גבולות עבור 2 משתנים

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = ?$$

מוצאים גבול ע"י הכנסת x וואו y לתוך ה-lim, ואו התיקון. אם יש שוויון אז יש גבול והוא מה שקיבלנו. אם אין שוויון, אז אין גבול.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow a} f(x, y) \right)$$

בדיקת רציפות

פונקציה f(x, y) רציפה בנקודה M(x_0, y_0) אם:

- 1) מוגדרת בנקודה זו (יש ערך עבור f(x_0, y_0))
- 2) קיים גבול והגבול שווה לערך הפונ' בנקודה.

גזירה של פונ' מורכבת. כלל השרשרת

$$z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$$

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

נקבל ביטוי שיש בו גם x, y וגם u, v. צריך להציב u, v לפי f(x, y), v = psi(x, y), u = phi(x, y).

מצב אפשרי

$$w = f(z, u, v, s) = F(x, y)$$

$$z = z(x, y), u = u(x, y), v = v(x, y), s = s(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}$$

מצב נוסף

$$z = f(x, y, u, v) = F(x, y)$$

$$y = y(x), u = u(x), v = v(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

גזירת של פונקציה סתומה

$$F(x, y) = 0$$

$$e^y - e^x + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

גזרות חלקיות מסדרים גבוהים יותר

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = f''_{yy}$$

$$f''_{xx} = f''_{yy}$$

גזרות מכוונת

רוצים לגזור את פונ' בכוון וקטור s.

$$\frac{du}{ds} = \text{grad}u \cdot \frac{s}{|s|}$$

הערה: |s| זה אורך הוקטור s.

כלומר, מחשבים את וקטור gradient של u ומכפילים סקלרית עם הוקטור s מנורמל ע"י האורך שלו.

גזרת בכיוון הגרדיאנט

$$s = \text{grad}u \Rightarrow \frac{du}{ds} = |\text{grad}u|$$

גזרת מקבלת ערך מקסימלי בכיוון הגרדיאנט.

משוואות ומציאת גרדיאנט

וקטור הגרדיאנט מאונך למישור המשיקים למשטח בנקודה מסוימת.

$$\text{grad}F = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

נסחאות שימושיות

$$\text{שטח פנים של כדור: } 4\pi R^2$$

$$\text{נפח כדור: } \frac{4}{3}\pi R^3$$

משוואת ישר משיק לנקודה בנקודה (x_0, y_0)

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

משוואת מישור משיק למשטח בנקודה (x_0, y_0, z_0)

$$F(x, y, z) = 0 \text{ כשהמשטח נתון בצורה סתומה:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

כשהמשטח נתון בצורה מפורשת: z = f(x, y)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

משוואת ישר ניצב למשטח בנקודה (x_0, y_0, z_0)

רוצים משוואת ישר המאונך למישור ועובר בנקודה (x_0, y_0, z_0).

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

כל זוג שוויונות מגדיר מישור. חיתוך שני מישורים נתן את הישר.

משוואת ישר משיק לעקום הנתון בצורה פרמטרית

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$$

נקודה t_0, כלומר x = phi(t_0), y = psi(t_0), z = chi(t_0)

משוואת הישר המשיק לעקום בנקודה t_0:

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z - \chi(t_0)}{\chi'(t_0)}$$

משוואת מישור נורמל לעקום הנתון בצורה פרמטרית
יש אינסוף נורמלים לעקום (קיים ישרים המאונכים למשיק בנקודת ההשקה). כל הנורמלים האלה נמצאים על מישור.

$$(x - \varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) + (y - \psi(t_0)) \cdot \psi'(t_0) + (z - \chi(t_0)) \cdot \chi'(t_0) = 0$$

משוואת ישר משיק לעקום המוגדר ע"י חיתוך 2 משטחים

העקום מוגדר ע"י חיתוך:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \Phi_2(x, y, z) = 0$$

משוואת הישר המשיק לעקום בנקודה (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{x - x_0}{\Delta_1} = \frac{y - y_0}{\Delta_2} = \frac{z - z_0}{\Delta_3}$$

משוואת המישור הנורמל לעקום המוגדר ע"י חיתוך 2 משטחים

$$\Delta_1(x - x_0) + \Delta_2(y - y_0) + \Delta_3(z - z_0) = 0$$

הגדרת א למשוואות התחומות

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

דיפרנציאל

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$
$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2$$
$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (dy)^3$$

מעבר דיפרנציאלים

$$v(x) = u(t) \Rightarrow d(v(x)) = d(u(t)) \Rightarrow [v(x)]_x dx = [u(t)]_t dt$$

נקודות קיצון

משפט: אם נקודה היא נקודת קיצון, אזי כל הנגזרות החלקיות בנקודה שוות אפס או לא קיימות.

מציאת נקודות קיצון ללא אילוץ
1) מוצאים נקודות חשודות ע"י השוואת גזרות חלקיות לאפס

2) נחשב את AC - B^2, כאשר: A = f''_{xx}, B = f''_{yy}, C = f''_{zz}

3) נציב ב- AC - B^2 את הנקודות החשודות ונבדוק את הסימן מול התנאים הבאים:

חישוב נפח גוף הכתוב בין 2 קליפות

$$\Phi_1 - \text{קליפה החתונה}$$

$$\Phi_2 - \text{קליפה עליונה}$$

D - הטלת הגוף על מישור x, y

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y) dx dy$$

חישוב אינטגרל כפול

$$\int_{x=c}^{x=b} \left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

$$\int_{y=c}^{y=d} \left[\int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

$$\int_{y=c}^{y=d} \left[\int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

החלפת משתנים

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| \cdot du dv$$

תכונות היעקוביאן

$$x = f(u, v), y = g(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$$

$$\frac{D(x, y)}{D(r, s)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(r, s)}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{D(u, v)}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(x, y)} = 1$$

חישוב היעקוביאן

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{J} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

קורדינטות קוטביות

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, J = r$$

1) טוב כשיש תחום עם סימטריה מעגלית או כשבפונקציה יש ביטוי מהצורה x^2 + y^2.

2) כדי להבין איך r, phi משתנים פשוט מציבים את x, y ע"י r, phi במשוואות שמגדירות את D.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = R^2$$

$$x = a \cdot r \cos \varphi, y = b \cdot r \sin \varphi, J = ab \cdot r$$

דוגמה: מעגל פשוט

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \cdot dr d\varphi$$

דוגמאות החלפת משתנים

$$AB - C^2 > 0 \wedge A > 0 \Rightarrow \min$$

$$AB - C^2 > 0 \wedge A < 0 \Rightarrow \max$$

$$AB - C^2 < 0 \Rightarrow \text{saddle}$$

$$AB - C^2 = 0 \Rightarrow \text{unknown}$$

נקודות קיצון בפונקציה עם שני משתנים + אילוץ

נתונה פונקציה f(x, y) ואילוץ phi(x, y) = 0

דרך 1:

אם ניתן לבודד בקלות את אחד המשתנים מהאילוץ אז נבודד אותו ונציב אותו בפונקציה המטרה. אז נפתור כבעיית קיצון רגילה ללא אילוץ.

דרך 2:

משתמשים בכפלי לגרנד.

$$F = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

מוצאים נקודות חשודות המקיימות:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \varphi(x, y) = 0$$

מוצאים דיפרנציאל שני ומנסים לקבוע לו סימן:

$$d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (dy)^2$$

אם d^2 F > 0 אזי מינימום

אם d^2 F < 0 אזי מקסימום

אם d^2 F = 0 אזי נדרשת חקירה נוספת

אם d^2 F משנה סימן אז לא נקודת קיצון,

$$\text{למשל } d^2 F = 17 dx dy$$

אפשרות נוספת לבחון אם זה נקודת קיצון:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(p_0) & \varphi'_y(p_0) \\ \varphi'_x(p_0) & F''_{xx}(p_0) & F''_{xy}(p_0) \\ \varphi'_y(p_0) & F''_{xy}(p_0) & F''_{yy}(p_0) \end{vmatrix}$$

אם Δ > 0 אזי מינימום

אם Δ < 0 אזי מקסימום

נקודות קיצון לפונקציה 3-ב משתנים + אילוץ

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

דרך 1:

מבודדים את אחד המשתנים באילוץ ומציבים אותו בפונקציה המטרה. אז פותרים כמו בעיה רגילה של 2 משתנים ללא אילוץ.

דרך 2:

משתמשים בכפלי לגרנד.

$$F = f(x, y, z) + \lambda \cdot \varphi(x, y, z)$$

מוצאים נקודות חשודות המקיימות:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \varphi(x, y, z) = 0$$

מוצאים דיפרנציאל שני ומנסים לקבוע לו סימן:

$$d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} (dz)^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz$$

אם יש צורך אז מציבים את הנקודה החשודה בדיפרנציאל השני ואז מסתכלים על הסימן עבור נקודה זו.

אם עדיין לא ברור הסימן אז ניתן להשתמש בתנאי האילוץ באופן הבא על מנת לסלק את אחד הדיפרנציאלים:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \Rightarrow d\varphi(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

מהמשוואה האחרונה ניתן לבודד את אחד הדיפרנציאלים. מציב נוסף:

לעיתים מניעים למצב הבא בו קשה לקבוע את סימן הדיפרנציאל:

$$d^2 F = (-32)(dx)^2 + 2 \cdot (-16) dx dy + (-32)(dy)^2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & & C & & B \end{matrix}$$

אז נבדוק בשיטה של AC - B^2

מציאת נקודות קיצון בתחום סגור

1) מוצאים נקודות קיצון מקומיות בדרך הרגילה מבלי להתחשב באילוץ. אז בודקים אם הן עונות על תנאי האילוץ.

2) מוצאים נקודות על שפת האילוץ בעזרת לגרנד.

3) מוצאים נקודות על הישרים התוחמים את התחום, לדוגמה נציב x = 0 כדי למצוא נקודות על קצה התחום החסום ע"י הישר x = 0.

4) בודקים נקודות בפינות המחברות בין ישרים תוחמים ובין האילוץ.

אינטגרציה בחלקים

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

אינטגרל כפול

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

משמעות: חישוב הנפח הכתוב בין גרף הפונקציה f(x, y) לבין מישור x, y בתחום D.

חישוב שטח התחום D

$$\iint_D dx dy$$

