מבחן בחשבון אינפיניטסמלי 2
מועד ב'

1. א. חשבו את נפח גוף הסיבוב המתקבל על ידי סיבוב סביב ציר x החסום על ידי גרפים של שתי הפונקציות הבאות: $y_1 = |x-2|$, $y_2 = 2-(x-2)^2$.
ציירו את התחום.

פתרון:

שתי הפונקציות נחתכות כאשר: $x = 1$ ו- $x = 3$, לכן כדי לחשב את נפח גוף הסיבוב, צריך לחשב:

$$\pi\int_1^3 ((2-(x-2)^2)^2-(x-2)^2)dx$$

$$=\pi\int_1^3 ((x-2)^4-5(x-2)^2+4)dx=\pi\{\frac{(x-2)^5}{5}-\frac{5(x-2)^3}{3}+4x\}|_1^3=\frac{76\pi}{15}$$

ב. קבעו התכנסות של האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{arctgx}{x}dx$$

פתרון:

כאשר $x > 1$ מתקיים, $arctg(x) > \frac{\pi}{4}$, לכן:

$$\int_1^\infty \frac{arctg(x)}{x}dx > \int_1^\infty \frac{\pi}{4x}dx = \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

לכן, האינטגרל מתבדר.

2. א. הוכיחו כי

$$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....\right)\left(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+.....\right)=1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+.....$$

פתרון:

פיתוח לטור מקלורן של e^x הוא: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

לכן, $e^1\cdot e^2=e^3$.

ב. קבעו התכנסות או התבדרות של הטור המספרי

(במקרה של התכנסות קבעו אם בתנאי או בהחלט):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\sin n}{n\left(1+e^{-n}\right)}$$

פתרון: הטור הוא טור חיובי מכיוון ש- $\sin n\geq -1$, ולכן $3+\sin n\geq 2$. המכנה גם חיובי מכיוון ש- $n(1+e^{-n})>0$ לכל n טבעי. לכן, נשתמש במבחן השוואת טורים חיוביים ונקבל: $\frac{3+\sin n}{n(1+e^{-n})}>\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$. לכן, הטור מתבדר.

3. א. מצאו את רדיוס ותחום ההתכנסות של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k^2+5}x^k$

פתרון:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k+2}{k^2+5}}{\frac{k+3}{(k+1)^2+5}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\mathrm{k}+2)(\mathrm{k}^2+2\mathrm{k}+6)}{(\mathrm{k}+3)(\mathrm{k}^2+5)}=1$$

לכן, הטור מתכנס כאשר: $-1<x<1$.

כאשר $x=1$ נקבל: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k^2+5}$ שהוא טור מתבדר לפי מבחן השוואה גבולי עם הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{k}}$ כי:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k+2}{k^2+5}}{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)k}{k^2+5}=1>0$$

לכן הטור המקורי גם מתבדר, כי הטור ההרמוני מתבדר.

כאשר $x=-1$ נקבל טור מחליף סימן, המקיים:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{k^2+5}=0$$

וגם מתקיים ש: $\frac{k+2}{k^2+5}$ היא סדרה מונוטונית יורדת כי אם:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+5}$$

אז:

$$f'(x)=\frac{x^2+5-2x(x+2)}{(x^2+5)^2}=\frac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}=\frac{(x+5)(1-x)}{(x^2+5)^2}<0$$

כאשר $x>1$

לכן, לפי קריטריון לייבניץ הטור מתכנס עבור: $x=-1$. לכן, תחום ההתכנסות של הטור הוא: $-1\le x<1$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4^k}$.

פתרון: נסתכל על הטור בצורה הבאה:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots.$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k}$$
$$+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4^k}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{4}}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{4})^2}$$
$$=\frac{4}{9}$$

4. א. פתחו טור טיילור עד סדר 2 עבור הפונקציה $f(x,y)=\sin x+\cos x\cdot\cos y$.

פתרון:

$P_2(x,y) =$
$f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy +$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\frac{y^2}{2!}$

$$f(0,0) = \sin 0 + \cos 0 \cos 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos 0 - \sin 0 \cos 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\cos 0 \sin 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\sin 0 - \cos 0 \cos 0 = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \sin 0 \sin 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\cos 0 \cos 0 = -1$$

לכן, טור טיילור מסדר שני הוא:

$$P_2(x,y) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

ב. מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה

$f(x,y) = \left(4x - x^2\right)\cos y$ בתחום הסגור, שהינו המלבן שצלעותיו הן

$-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4},\ 1 \le x \le 3$.

פתרון:

צריך לבדוק את ערכי הפונקציה בקדקדי המלבן:

$\left(1;\frac{\pi}{4}\right),\quad \left(3;\frac{\pi}{4}\right),\quad \left(1;-\frac{\pi}{4}\right),\quad \left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$

ובנקודות הקיצון על ארבעת השפות.

נמצא את נקודות הקיצון על השפות.

השפה: $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4} \quad x = 1,$: הפונקציה תהיה:

$f(y) = 3\cos y$

ולכן,

$f'(y) = -3\sin y$

ולכן מתקיים $f'(y) = 0$ כאשר $y = 0$. לכן צריך לבדוק את ערך הפונקציה בנקודה: $(1;0)$.

השפה: $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4} \quad x = 3,$: הפונקציה תהיה:

$f(y) = 3\cos y$

ראינו שלפונקציה יש נקודת קיצון כאשר $y = 0$

ולכן צריך לבדוק את ערך הפונקציה בנקודה: $(3;0)$

השפה: $1 \le x \le 3 \quad y = \frac{\pi}{4},$: הפונקציה תהיה:

$$f(x) = (4x - x^2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ולכן,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - 2x)$$

ומתקיים: $f'(x) = 0$ כאשר $x = 2$.

לכן, צריך לבדוק את הנקודה: $(2;\frac{\pi}{4})$

השפה: $1 \le x \le 3 \quad y = -\frac{\pi}{4},$: הפונקציה תהיה:

$$f(x) = (4x - x^2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

וכבר ראינו שהנגזרת מתאפסת כאשר: $x = 2$.

לכן, צריך לבדוק את הנקודה: $(\ 2;-\frac{\pi}{4})$

$$f(1;0) = f(3;0) = 3,\quad f\left(2;\frac{\pi}{4}\right) = f\left(2;-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$f\left(1;\frac{\pi}{4}\right) = f\left(1;-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(3;\frac{\pi}{4}\right) = f\left(3;-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

לכן הערך הגדול ביותר של הפונקציה הוא: 3

הערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

5. א. חשבו את האינטגרל הבא $\int_C 2xydx + (x^2+y^2)dy$

כאשר C הוא קטע על הפרבולה $y=2x^2$ בין הנקודות $(0,0),(1,2)$.

פתרון:

נציב באינטגרל: $y=2x^2$ ונקבל: $dy=4xdx$. לכן, האינטגרל הוא:

$$\int_0^1 2x\cdot 2x^2dx + (x^2+4x^4)4xdx$$

$$= \int_0^1 16x^5 + 8x^3 dx = \frac{16x^6}{6} + \frac{8x^4}{4} |_0^1 = \frac{14}{3}$$

ב. חשבו את האינטגרל הכפול $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdy$.

פתרון:

$$\int_1^{\ln 8}\int_1^{\ln y} e^{x+y}dxdy$$

$$= \int_1^{\ln 8} e^y \int_1^{\ln y} e^x dxdy$$

$$= \int_1^{\ln 8} e^y\left(e^{\ln y} - e^1\right)dy$$

$$= \int_1^{\ln 8} ye^y - e^{y+1}dy$$

$$= ye^y|_1^{\ln 8}$$

$$- \int_1^{\ln 8} e^y dy - e^{y+1}|_1^{\ln 8}$$

$$= 8\ln 8 - e - 8 + e - 8e + e^2 = e^2 - 8e + 8\ln 8 - 8$$

6. א. חשב את האינטגרל $\int_{-2}^{2} \max\{|x|,\ 2-x^2\}dx$.

פתרון:

כאשר: $-1 < x < 1$, $\max\{|x|, 2-x^2\} = 2-x^2$

וכאשר: $1 < x < 2$ או $-2 < x < -1$, $\max\{|x|, 2-x^2\} = |x|$

בנוסף, רואים שהפונקציה היא זוגית, לכן ניתן לכתוב את האינטגרל כ:

$$2\int_0^2 \max\{|x|, 2-x^2\}dx$$

$$= 2\int_0^1 (2-\mathrm{x}^2)\mathrm{dx}$$

$$+ 2\int_1^2 \mathrm{xdx} = 2\left(2\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^3}{3}\right)|_0^1 + 2\frac{\mathrm{x}^2}{2}|_1^2 = \frac{10}{3} + 4 - 1$$

$$= \frac{19}{3}$$

ב.מצאו מרכז כובד של גוף הומוגני החסום על ידי המישור $z=1$ והחרוט

$z=\sqrt{x^2+y^2}$.

פתרון:

נמצא את המסה של הגוף:

$$m=\rho\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=\rho\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{z^2}{2}d\theta dz=\rho\int_0^1\pi z^2\,dz=\frac{\rho\pi z^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\rho\pi}{3}$$

כעת נחשב את מרכז הכובד:

כאשר יודעים: $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$

$$x_0=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta\,dz=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{z^3}{3}\cos\theta\,d\theta dz=0$$

$$y_0=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta\,dz=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{z^3}{3}\sin\theta\,d\theta dz=0$$

$$z_0=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z zr\,dr\,d\theta\,dz=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{z\cdot z^2}{2}d\theta dz=\frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{z^3}{2}d\theta dz$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\pi z^3=\frac{3}{\pi}\frac{\pi z^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}$$

לכן, מרכז הכובד הוא: $(0;0;\frac{3}{4})$