תרגיל מס' 9 בחדו"א 2 למהנדסים.

<u>הנושא: פונקציות רבות משתנים-חשבון דיפרנציאלי.</u>

פתרונות

1. מצא את הנגזרות החלקיות מסדר הראשון:

(א) $z = e^x \tan(x-y)$

פתרון:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x\left(\tan(x-y)+\frac{1}{\cos^2(x-y)}\right) \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x\left(-\frac{1}{\cos^2(x-y)}\right)$$

(ב) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$,

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\frac{1}{y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

(ג) $z = \int_x^y e^{t^2}dt$

פתרון:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{x^2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{y^2}$$

(ד) $f(x,y) = \int\limits_{\pi}^{x^2+y^2}\sin(t^2)dt$

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2+y^2)^2\cdot 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x^2+y^2)^2\cdot 2y$$

2. חשב את הנגזרות החלקיות מסדר הראשון ב-$(0,0)$ של הפונקציות הבאות:

(א)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

פתרון:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0}}-0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{\sqrt{0+(\Delta y)^2}}-0}{\Delta y}=0$$

ב) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)=(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

פתרון:

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2(\Delta x)\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0\cdot(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0$$

3. בדוק האם כל אחת מהפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב-$(0,0)$:

א) $z=\sqrt{x^4+y^4}$

פתרון:

דרך 1: נראה כי הנגזרות החלקיות z_x', z_y' רציפות ב-$(0,0)$ $\Leftarrow$ z דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

$$z(0,0)=0$$

$$z_x'(0,0)=\lim_{h->0}\frac{\sqrt{h^4+0^4}-0}{h}=\lim_{h->0}h=0$$

$$z_y'(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{0^4+h^4}-0}{h}=0$$

$$z_x'=\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+y^4}},\qquad z_y'=\frac{4y^3}{2\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$\lim_{(x,y)->(0,0)}z_x'=z_x'(0,0)=0,\quad \lim_{(x,y)->(0,0)}z_y'=z_y'(0,0)=0$$

דרך 2: נראה את הדיפרנציאביליות של z בנק' $(0,0)$ לפי ההגדרה.

$$\Rightarrow\quad z(x,y)=z(0,0)+z_x'(0,0)(x-0)+z_y'(0,0)(y-0)+R$$

$$R=\sqrt{x^4+y^4},\qquad \lim_{(x,y)->(0,0)}\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

ב) $z=\sqrt[3]{x^2y^2}$

פתרון:

כיוון שהנגזרות החלקיות z_x', z_y' אינן רציפות ב-$(0,0)$, נראה את הדיפרנציאביליות לפי ההגדרה (שימו לב שהפונקציה רציפה ב-$(0,0)$ ונגזרות חלקיות z_x', z_y' קיימות ב-$(0,0)$ ושוות ל-0).

$$\Rightarrow \quad z(x,y)=z(0,0)+z'_x(0,0)(x-0)+z'_y(0,0)(y-0)+R$$

$$R=\sqrt[3]{x^2y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

ג) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

פתרון:

נחשב את z'_x, z'_y ב-$(0,0)$, אם הן קיימות:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}=-1$$

מכאן נובע כי הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}$ לא קיים, לכן z'_x לא קיימת ב-$(0,0)$. כבר ניתן לומר שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{0^2+h^2}-0}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{0^2+h^2}-0}{h}=-1$$

מכאן נובע כי הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}$ לא קיים, לכן z'_y לא קיימת ב-$(0,0)$.

מכאן נובע כי הפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה.

4. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$

א) $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,4,2)$, $\bar{u}=4\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$

פתרון:

הפונקציה $f(x,y,z)$ גזירה בסביבת הנקודה $(2,4,2)$. וקטור היחידה בכיוון של $\bar{u}$ הוא $\bar{e}_{\bar{u}}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$.

נחשב את הנגזרת המכוונת לפי הנוסחה :

$$\frac{\partial f(2,4,2)}{\partial\bar{u}}=\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot\frac{2}{3}+\frac{xz}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot\frac{1}{3}+\frac{xy}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot(-\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$$

ב) $f(x,y,z)=xy+yz^2-xz^3$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,0,3)$, $\bar{u}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

פתרון:

הפונקציה $f(x,y,z)$ גזירה בסביבת הנקודה $(2,0,3)$.

$$\|\bar{u}\|=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}=1$$

לפי הנוסחה , נקבל :

$$\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial x}\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial y}\cdot(-\frac{1}{3})+\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial z}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$(y-z^3)\Big|_{(2,0,3)}\cdot(-\frac{2}{3})+(x+z^2)\Big|_{(2,0,3)}\cdot(-\frac{1}{3})+(2yz-3xz^2)\Big|_{(2,0,3)}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{65}{3}$$

5. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$:

$$\bar{u}=(1,1)\qquad,\ (x_0,y_0)=(0,0)\qquad,\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\ \ ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון:

דרך 1:

נרשום משוואת הישר l העובר דרך $(0,0)$ בכוון של $\bar{u}$: $t\in R$, $l=\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$

לאורך הישר l הפונקציה $f(x,y)$ היא פונקציה מורכבת של ה- t

נסמן: $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^3}{t^4+t^2}\ \ ,\ t\neq 0\\ 0\ ,\ t=0\end{cases}$

לפי ההגדרה נקבל: $\frac{\partial f(0,0)}{\partial \bar{u}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^3}{(t^4+t^2)\sqrt{t^2+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

דרך 2: לפי ההגדרה הבאה

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \bar{u}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

כאשר (a,b) הוא וקטור יחידה. אחרי הנרמול, $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, לכן:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \bar{u}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},0+h\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\frac{1}{2}h^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}h}{\frac{1}{4}h^4+\frac{1}{2}h^2}-0}{h}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3\left(\frac{1}{2}h^2+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

6. מצא את גרדיאנט של שדה סקלרי u בנקודה M_0, כלומר $\nabla u(M_0)$

ב) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad,\qquad M_0(1,1,1)$

$$\nabla u(M_0)=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\bar{k}=$$

$$(\frac{x}{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,1,1)}\bar{i}+(\frac{y}{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,1,1)}\bar{j}+(\frac{z}{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,1,1)}\bar{k}=\frac{1}{3}\bar{i}+\frac{1}{3}\bar{j}+\frac{1}{3}\bar{k}$$

7. הפונקציות $v(x,y)$, $u(x,y)$ הן גזירות בכל מישור , a,b מספרים קבועים. הוכח כי $\nabla(au+bv)=a\nabla u+b\nabla v$.

פתרון:

$$\nabla(au(x,y)+bv(x,y))=$$
$$=(a\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+b\frac{\partial v(x,y)}{\partial y})\bar{i}+(a\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+b\frac{\partial v(x,y)}{\partial y})\bar{j}=$$
$$a(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\bar{j})+b(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\bar{j})$$
$$=a\nabla u(x,y)+b\nabla v(x,y)$$

8. חשב את נגזרות חלקיות מסדר ראשון של הפונקציה מורכבת w , כלומר $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$

(א) $w(x,y)=\ln(x^2-y^2)$ כאשר $x=u-v$, $y=u^2+v^2$

פתרון:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2-y^2}\cdot 1+\frac{(-2y)}{x^2-y^2}\cdot 2u$$
$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2x}{x^2-y^2}\cdot(-1)+\frac{(-2y)}{x^2-y^2}\cdot 2v$$

$\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ ניתן לבטא ע"י ה- u , v. למשל,

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{2u-2v-4u^3-4uv^2}{(u-v)^2-(u^2+v^2)^2}$$

(ב) $w(x,y)=e^x+xy^2$ כאשר $x=u+v$, $y=e^{u+v}$

פתרון:

דרך 1: לפי כלל השרשרת נקבל:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=(e^x+y^2)\cdot 1+2xy\cdot e^{u+v}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=(e^x+y^2)\cdot 1+2xy\cdot e^{u+v}$$

נותר רק להציב $x=u+v$ ו- $y=e^{u+v}$.

דרך 2: ע"י ההצבה נקבל :

$$\frac{\partial w}{\partial u}=(e^{u+v}+(u+v)e^{2(u+v)})'_u=e^{u+v}+2(u+v)e^{2(u+v)}+e^{2(u+v)}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v}=(e^{u+v}+(u+v)e^{2(u+v)})'_v=e^{u+v}+2(u+v)e^{2(u+v)}+e^{2(u+v)}$$

9. מצא את הנגזרת של פונקציה מורכבת u לפי t, כלומר $\frac{du}{dt}$.

$u(x,y,z)=\ln(x+y+z)$ כאשר $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$, $z=t$

פתרון:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{1}{x+y+z}(-2\cos t\sin t+2\cos t\sin t+1)=\frac{1}{x+y+z}$$

$\frac{du}{dt}$ ניתן לבטא ע"י ה- t

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t+\sin^2 t+t}=\frac{1}{t+1}$$

10. מצא את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של $z=f(x,y)$, כלומר $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

כאשר z מקיימת את המשוואה הנתונה.

(א) $y^2ze^{x+y}-\sin(xyz)=12$

פתרון:

נסמן: $F(x,y,z)=y^2ze^{x+y}-\sin(xyz)-12$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{y^2ze^{x+y}-\cos(xyz)\cdot yz}{y^2e^{x+y}-\cos(xyz)\cdot xy}=\frac{-zye^{x+y}+z\cos(xyz)}{ye^{x+y}-x\cos(xyz)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2yze^{x+y}+y^2ze^{x+y}-\cos(xyz)\cdot xz}{y^2e^{x+y}-xy\cos(xyz)}$$

(ב) $xyz=\cos(x+y+z)$

פתרון:

נסמן: $F(x,y,z)=xyz-\cos(x+y+z)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{yz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{xz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}=-1$$

אפשר גם בשיטה אחרת. נרשום את המשוואה $xyz-\cos(x+y+z)=0$ נגזור את המשוואה לפי x :

$$yz+xyz'_x+\sin(x+y+z)\cdot(1+z'_x)=0$$

עכשיו נחלץ z'_x

$$z'_x=-\frac{yz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}$$

באופן דומה לגבי y

$$xz+xyz'_y+\sin(x+y+z)\cdot(1+z'_y)=0$$

$$z'_y=-\frac{xz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}$$

11. פתח לפי נוסחת טיילור סביב נקודה M את הפונקציה:

(א) $M(1,1)$ $f(x,y)=x^y$ עד סדר שני ($n=2$) .
פתרון:

$$f(x,y)=f(1,1)+f'_x(1,1)(x-1)+f'_y(1,1)(y-1)+$$
$$+\frac{1}{2}[f''_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f''_{yy}(1,1)(y-1)^2]$$

תשובה סופית:

$$f(x,y)=1+1(x-1)+0(y-1)+\frac{1}{2}[0(x-1)^2+2\cdot 1(x-1)(y-1)+$$
$$+0\cdot(y-1)^2]=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$

(ב) $M(1,1)$ $f(x,y)=\ln\frac{x}{y}$ עד סדר שלישי ($n=3$)

פתרון:
באופן כללי:

$$f(x,y)=f(1,1)+f'_x(1,1)(x-1)+f'_y(1,1)(y-1)+$$
$$+\frac{1}{2}[f''_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f''_{yy}(1,1)(y-1)^2]+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}[f'''_{x^3}(1,1)(x-1)^3+3f'''_{x^2y}(1,1)(x-1)^2(y-1)+3f'''_{xy^2}(1,1)(x-1)(y-1)^2+$$
$$+f'''_{y^3}(1,1)(y-1)^3]$$

נחשב במקרה שלנו: $M(1,1)$ $f(x,y)=\ln x-\ln y$
נחשב את הנגזרות :

$$f(1,1)=0,\ f'_x(1,1)=\left.\frac{1}{x}\right|_{(1,1)}=1,\ f''_{xx}(1,1)=-\left.\frac{1}{x^2}\right|_{(1,1)}=-1,\ f'''_{x^3}(1,1)=\left.\frac{2}{x^3}\right|_{(1,1)}=2$$

$$f'_y(1,1)=-\left.\frac{1}{y}\right|_{(1,1)}=-1,\ f''_{yy}(1,1)=\left.\frac{1}{y^2}\right|_{(1,1)}=1,\ f'''_{y^3}(1,1)=-\left.\frac{2}{y^3}\right|_{(1,1)}=-2$$
$$f''_{xy}(1,1)=0,\ f'''_{xy^2}(1,1)=0,\ f'''_{x^2y}(1,1)=0$$

תשובה סופית:

$$f(x,y)=0+1\cdot(x-1)-1(y-1)+$$
$$+\frac{1}{2}[-1\cdot(x-1)^2+2\cdot0\cdot(x-1)(y-1)+1\cdot(y-1)^2]+$$
$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}[2\cdot(x-1)^3+3\cdot0\cdot(x-1)^2(y-1)+3\cdot0\cdot(x-1)(y-1)^2-$$
$$-2\cdot(y-1)^3]=(x-1)-(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{6}\cdot2\cdot(x-1)^3-\frac{2}{6}\cdot(y-1)^3$$

בהצלחה!