פתרון תרגיל 10 באינפי 2 למהנדסים

1. חשב את $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ **, כאשר** $D=\{2\le x\le 3, 0\le y\le 1\}$.

פתרון : בתחום המלבני אין חשיבות לסדר האינטגרציה .

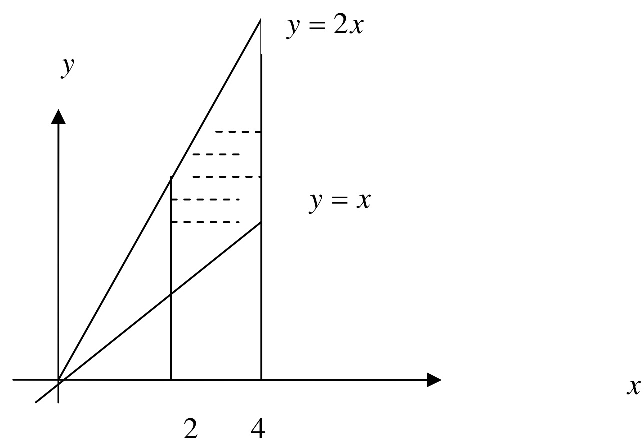
$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}=\int_2^3 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^3}dy=$$

$$=\int_2^3 dx\int_0^1 (1+x+y)^{-3}dy=\int_2^3\left(\frac{(1+x+y)^{-2}}{-2}\right)_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_2^3 (2+x)^{-2}-(1+x)^{-2}dx=\left(\frac{1}{2}(2+x)^{-1}-\frac{1}{2}(1+x)^{-1}\right)_{x=2}^{x=3}=\frac{1}{10}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{1}{60}$$

2. חשב את $\iint_R \frac{y}{x}dxdy$ **, כאשר** $R=\{2\le x\le 4, x\le y\le 2x\}$.

פתרון : נשרטט את תחום האינטגרציה

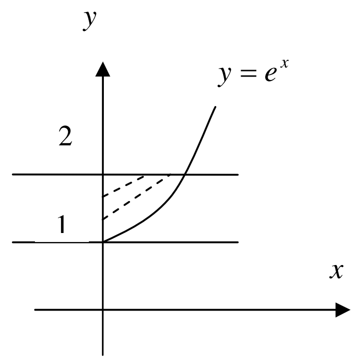


$$\iint_R \frac{y}{x}dxdy=\int_2^4 dx\int_x^{2x}\frac{y}{x}dy=\int_2^4\frac{1}{x}\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=x}^{y=2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{4x^2-x^2}{x}dx=\frac{3}{2}\int_2^4 xdx=\frac{3}{4}\left(x^2\right)_{x=2}^{x=4}=\frac{3}{4}(16-4)=9$$

3. חשב את $\iint_R e^x dxdy$ **, כאשר** $R=\{0\le x\le \ln y\ ,\ 1\le y\le 2\}$.

פתרון : נשרטט את תחום האינטגרציה $x=\ln y \Leftrightarrow y=e^x$.



$$\iint_R e^x dxdy = \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx =$$

$$= \int_1^2 \left(e^x\right)_{x=0}^{x=\ln y} dy = \int_1^2 (y-1)dy = \left(\frac{1}{2}y^2 - y\right)_{y=1}^{y=2} = 2-2-\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

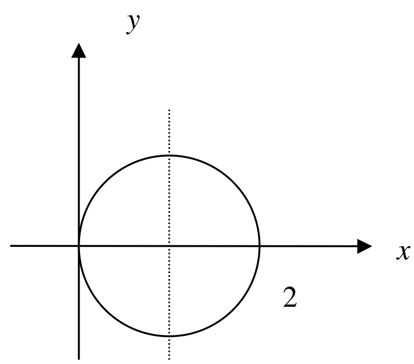
4. חשב את $\iint_R (x^2+y^2)ds$, כאשר $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x \}$.

פתרון :

משוואת השפה $x^2+y^2 = 2x$ נשלים לריבוע השלם :

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

משוואת המעגל המוזז , מרכזו בנקודה $(1,0)$. נשרטט את תחום האינטגרציה :



נשתמש בקואורדינאטות קוטביות : $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

משוואת השפה של R : $x^2+y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\varphi \Rightarrow r = 2\cos\varphi$

התחום R יעבור לתחום Δ: $\Delta = \left\{(r,\varphi) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \;,\; 0 \le r \le 2\cos\varphi \right\}$

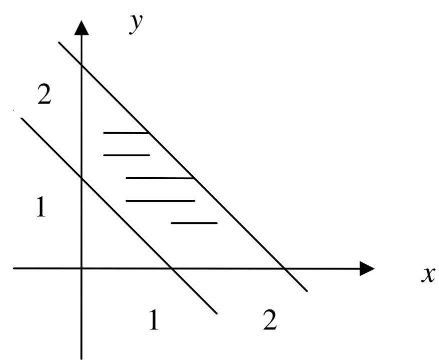
$$\iint_R (x^2+y^2)ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{r^4}{4}) \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 2^4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\varphi\right)^2 d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left(\varphi+\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi$$

.5 חשב את $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dS$, כאשר $D = \{1 \le x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$.

פתרון : נשרטט את תחום האינטגרציה



נעשה את החלפת המשתנים $u = x+y, v = x-y$ ונקבל $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$

נחשב את היעקוביאן : $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

נתאר את שפת התחום בקואורדינאטות החדשות :

$$x+y=1 \Rightarrow u=1, \qquad x+y=2 \Rightarrow u=2$$
$$x=0 \Rightarrow u=-v, \qquad y=0 \Rightarrow u=v$$

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dS = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} dv = \frac{1}{2}\int_1^2 u\left(e^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u}\right) du = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\int_1^2 u\,du = \frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

.6 חשב את $\iiint_V z\,dV$, כאשר

$$. \ V = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{1}{2} \ , \ x \le y \le 2x \ , \ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

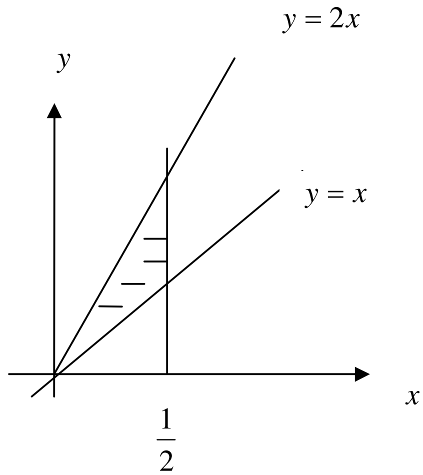
פתרון :

בתחום האינטגרציה V ה- z משתנה בין שני המשטחים : המישור $z=0$,

וחלק העליון של הכדור $z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$.

במישור $z=0$ (המישור ה- xy) נשרטט את התחום

$$R=\left\{(x,y)\middle|\ 0\le x\le \frac{1}{2}\ ,\ x\le y\le 2x\right\}$$



$$\iiint_V zdV=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{2x}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdzdydx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{2x}\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{2x}(1-x^2-y^2)dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(y-yx^2-\frac{1}{3}y^3)\Big|_x^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{10}{3}x^3)dx=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^4)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{192}$$

7. חשב את האינטגרל $\iiint_V(x^2+y^2)dV$, כאשר V התחום הכלוא

בין הגליל $x^2+y^2=4$ והמישורים $z=2$, $z=-1$.

פתרון :

תחום האינטגרציה $V=\left\{(x,y,z)\middle|\ 0\le x^2+y^2\le 4\ ,\ -1\le z\le 2\right\}$

נשתמש בקואורדינאטות גליליות : $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$

נמצא את תמונת התחום המישורי ($z=0$) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\le 4\ \right\}$

תמונת התחום V היא : $\Delta=\left\{(r,\varphi,z)\ \middle|\ -1\le z\le 2\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\ 0\le r\le 2\right\}$

$$\iiint_V(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^2 r^2rdzdrd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^3dr\int_{-1}^2 dz=2\pi\cdot\frac{r^4}{4}\ \Big|_0^2\cdot z\ \Big|_{-1}^2=24\pi$$

8. חשב את $\int\limits_C xydx + yzdy + zxdz$, כאשר C הוא חלק של המעגל

$x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 1,\ \ (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ בכיוון עליית הפרמטר.

פתרון :

ממשוואת המעגל $x = \cos t \ ,\ \ y = \sin t \ ,\ \ z = 1 \ ,\ \ (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$, נקבל :

$$x'(t) = -\sin t \ ,\ \ y'(t) = \cos t \ ,\ \ z'(t) = 0$$

לפי הנוסחה (*) , מקבלים

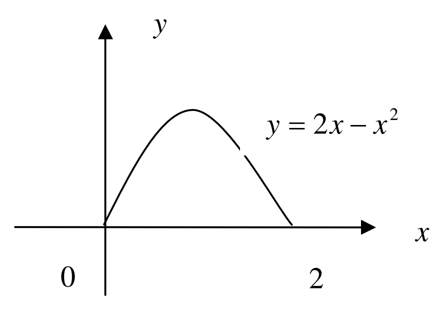
$$\int\limits_C xydx + yzdy + zxdz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t(-\sin t) + \sin t \cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t \sin^2 t + \sin t \cos t)dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d(\sin t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt =$$

$$= (-\frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{1}{4}\cos 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

9. חשב את $\int\limits_L ydx + (y + x^2)dy$, כאשר L הוא חלק של הפרבולה $y = 2x - x^2$ $(y \ge 0)$ לפי כיוון השעון.

פתרון : נשרטט את הגרף



נרשום משוואת הפרבולה $0 \le x \le 2$, $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ x = x \end{cases}$ ונקבל

$$dy = y'(x)dx = (2 - 2x)dx \ ,\ \ 0 \le x \le 2$$ לכן,

$$\int\limits_C ydx - (y + x^2)dy = \int\limits_0^2 \left(2x - x^2 - 2x(2 - 2x)\right)dx =$$

$$\int\limits_0^2 (3x^2 - 2x)dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^2 = 4$$

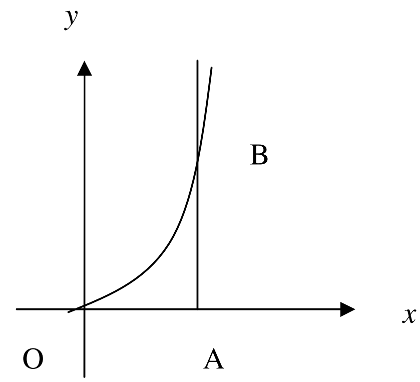
10. חשב את האינטגרל $\oint\limits_L 2xy^3dx + 4x^2y^2dy$ בשתי השיטות :

(1) באופן ישיר
(2) לפי משפט גרין

, כאשר L הוא המסלול הסגור $y=0$, $x=1$, $y=x^3$ בכיוון החיובי .

פתרון :

(1) המסלול הסגור L מורכב משלושה חלקים (ראה שרטוט)



ניקח את התנועה לאורך ה- L נגד כיוון השעון.

מ- $O(0,0)$ עד ל- $A(1,0)$ מקבלים $(dy=0)$ $y(x)=0$, $0\le x\le 1$

מ- $A(1,0)$ עד ל- $B(1,1)$ מקבלים $(dx=0)$ $x(y)=1$, $0\le y\le 1$

מ- $B(1,1)$ עד ל- $O(0,0)$ מקבלים $(dy=3x^2dx)$ x משתנה מ-1 עד ל-0 , $y(x)=x^3$

לפי התכונות של האינטגרל הקווי נקבל : $\oint\limits_C = \oint\limits_{OA} + \oint\limits_{AB} + \oint\limits_{BO}$, לכן

$$\oint\limits_C 2xy^3dx+4x^2y^2dy = 0+\int\limits_0^1 4y^2dy+\int\limits_{-1}^0 (2x(x^3)^3+4x^2(x^3)^2\cdot 3x^2)dx =$$

$$\frac{4}{3}y^3 \Big|_0^1 + \frac{14}{11}x^{11} \Big|_1^0 = \frac{2}{33}$$

(2) לפי משפט גרין

תחום D המוגבל על ידי השפה L (ראה השרטוט) הוא קשיר.

לפי משפט גרין נקבל :

$$\oint\limits_C 2xy^3dx+4x^2y^2dy = \iint\limits_D (\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3))dxdy =$$

$$\iint\limits_D 2xy^2dxdy = 2\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^3} xy^2dxdy = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x(x^3)^3dx = \frac{2}{33}x^{11}\Big|_0^1 = \frac{2}{33}$$

.11

חשב את $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, כאשר S הוא המשטח הגלילי שמוגבל על ידי

$x^2+y^2=9, (x\ge 0, y\ge 0)$, $z=0$, $z=3$ ובעל נורמל חיצוני.

פתרון :

המשטח S הוא מורכב משלושה המשטחים :

המישור (S_1) $z=0$, המישור (S_2) $z=3$, (S_3) חלק של הגליל $x^2+y^2=9,(x\geq 0, y\geq 0)$

לכן , האינטגרל הנתון הוא הסכום של שלושה האינטגרלים : $\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_3}$

נחשב את כל אחד מהם בנפרד :

$$\iint\limits_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0 \ , \ (z=0)$$

$$\iint\limits_{S_2} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iint\limits_{S_2} dxdy = 3\cdot 9\pi = 27\pi \ , \ (z=3)$$

התשובה מתקבלת מיידית , מפני שהאינטגרל הכפול $\iint\limits_{S_3} dxdy$ מהווה שטח של העיגול $x^2+y^2=9$.

ההיטל של המשטח הגלילי S_3 על המישור - xy בעל שטח אפסי $\iint\limits_{S_3} zdxdy = 0$, לכן

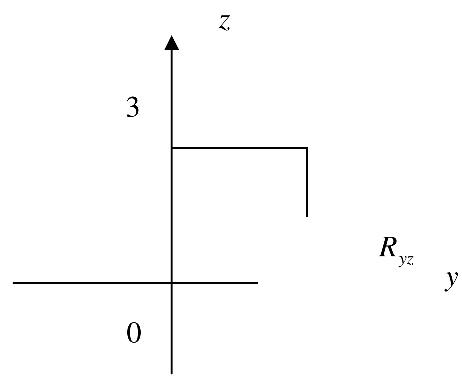
$$\iint\limits_{S_3} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{S_3} xdydz + ydzdx$$

$$\iint\limits_{S_3} xdydz + ydzdx = \iint\limits_{R_{yz}} xdydz + \iint\limits_{R_{xz}} ydzdx$$

כאשר R_{yz} ההיטל של המשטח הגליל S_3 על המישור - yz ,

R_{xz} ההיטל של המשטח הגלילי S_3 על המישור - xz .

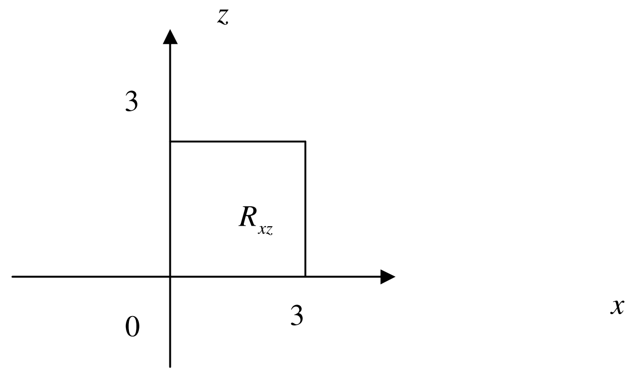
נתבונן בהיטל R_{yz} של המשטח הגלילי S_3 :



$$\iint\limits_{R_{yz}} xdydz = \iint\limits_{R_{yz}} \sqrt{9-y^2}\cdot 1dydz =$$

$$= \iint\limits_{R_{yz}} \sqrt{9-y^2}dydz = \left(\frac{1}{2}y\sqrt{9-y^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\arcsin 1 = \frac{9}{4}\pi$$

באופן דומה , נתבונן בהיטל R_{xz} של המשטח הגלילי S_3



$$\iint_{R_{xz}} y\,dxdz = \iint_{R_{xz}} \sqrt{9-x^2}\cdot 1dxdz =$$

$$= \iint_{R_{xz}} \sqrt{9-x^2}\,dxdz = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\arcsin 1 = \frac{9}{4}\pi$$

לכן ,

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 27\pi + \frac{9}{4}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{63}{2}\pi$$