תרגיל מס' 9 בחדו"א 2 למהנדסים.

הנושא: פונקציות רבות משתנים-חשבון דיפרנציאלי.

1. מצא את הנגזרות החלקיות מסדר הראשון:

(א) $z = e^x \tan(x-y)$ (ב) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$,

(ג) $z = \int_x^y e^{t^2}\,dt$ (ד) $f(x,y) = \int_{\pi}^{x^2+y^2} \sin(t^2)\,dt$

2. חשב את הנגזרות החלקיות מסדר הראשון ב-$(0,0)$ של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(ב) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) = (0,0) \\ 0, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

3. בדוק האם כל אחת מהפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב-$(0,0)$:

(א) $z = \sqrt{x^4 + y^4}$

(ב) $z = \sqrt[3]{x^2 y^2}$

(ג) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

4. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$

(א) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$, $(x_0,y_0,z_0) = (2,4,2)$, $\bar{u} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$

(ב) $f(x,y,z) = xy + yz^2 - xz^3$, $(x_0,y_0,z_0) = (2,0,3)$, $\bar{u} = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

5. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0, y_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$:

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\bar{u} = (1,1)$

6. מצא את גרדיאנט של שדה סקלרי u בנקודה M_0, כלומר $\nabla u(M_0)$

(א) $u = x + y + 2\sqrt{xy}$, $M_0(1,1)$

(ב) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,1,1)$

7. הפונקציות $v(x,y)$, $u(x,y)$ הן גזירות בכל מישור , a,b מספרים קבועים. הוכח כי $\nabla(au+bv)=a\nabla u+b\nabla v$.

8. חשב את נגזרות חלקיות מסדר ראשון של הפונקציה מורכבת w , כלומר $\frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial u}$

(א) $w(x,y)=\ln(x^2-y^2)$ כאשר $x=u-v$, $y=u^2+v^2$

(ב) $w(x,y)=e^x+xy^2$ כאשר $x=u+v$, $y=e^{u+v}$

9. מצא את הנגזרת של פונקציה מורכבת u לפי t, כלומר $\frac{du}{dt}$.

$u(x,y,z)=\ln(x+y+z)$ כאשר $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$, $z=t$

10. מצא את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של $z=f(x,y)$, כלומר $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$

כאשר z מקיימת את המשוואה הנתונה.

(א) $y^2ze^{x+y}-\sin(xyz)=12$

(ב) $xyz=\cos(x+y+z)$

11. פתח לפי נוסחת טיילור סביב נקודה M את הפונקציה:

(א) $M(1,1)$ $f(x,y)=x^y$ עד סדר שני ($n=2$).

(ב) $M(1,1)$ $f(x,y)=\ln\frac{x}{y}$ עד סדר שלישי ($n=3$).

בהצלחה!