Holon Academic
Institute of Technology

מכון אקדמי
טכנולוגי חולון (ע"ר)

DEPARTMENT OF SCIENCES
המחלקה למדעים

מבחן בקורס "מתמטיקה דיסקרטית א' " (20100)

מרצים: ד"ר מירב בליי, ד"ר דוד גרבר

סמסטר א'	מועד א'	שנה"ל תשס"ו	תאריך המבחן: 13.02.2006

זמן הבחינה: 3 שעות (180 דקות).
חומר עזר: דפי נוסחאות מהאתר (מצורפים) ומחשבון פשוט ללא גרפים וללא אפשרות תכנות.

הוראות: יש לענות על 5 מתוך 7 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 20 נקודות. לטובתך, רשום את הטיוטה בצמוד לפתרון השאלה.

שאלה 1

א. נתונה הקבוצה $A=\{1,\phi,\{1,\phi\}\}$. חשב $A-P(A)$, $P(A)-A$. (8 נק')

ב. הוכח את השוויון הבא לכל שלוש קבוצות A,B,C:

$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$. (7 נק')

ג. מצא את השוויון הדואלי עבור השוויון שבסעיף (ב). (5 נק')

שאלה 2

הוכח באינדוקציה את השוויון הבא:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1).$$

שאלה 3

א. תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. נגדיר את היחס הבא על הקבוצה $A\times A$:

$$(a,b)R(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

הראה כי זהו יחס שקילות. (10 נק')

ב. מצא את מחלקות השקילות עבור היחס שבסעיף א'. (10 נק')

שאלה 4

א. 1. תהי $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ פונקציה המוגדרת כך:

$$f(x)=\begin{cases}3x-5 & , \quad x>0\\ -3x+1 & , \quad x\le 0\end{cases}.$$

האם היא חד-חד-ערכית? האם היא על? (6 נק')

2. יהי $g:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ יחס המוגדר כך:

$$g(z)=z^2+z.$$

האם הוא פונקציה? אם כן, האם הוא חד-חד-ערכי? האם הוא על? (8 נק')

ב. האם ניתן להרכיב את הפונקציות שמסעיף א'? אם כן, נמקו ובנו את ההרכבה הנכונה. (6 נק')

<u>שאלה 5</u>

תהי $A=\mathbf{N}$, ונגדיר יחס R על $A\times A$ כך:

$$(x,y)R(m,n) \iff \left(x^2 \le m^2\right)\wedge\left(y|n\right).$$

א. הוכח כי R הוא יחס סדר חלקי. (9 נק')

ב. מצא איברים מינימליים ומקסימליים. (6 נק')

ג. אם ניקח $A=\mathbf{Z}$, האם R הוא עדיין יחס סדר חלקי? (5 נק')

<u>שאלה 6</u>

א. האם הביטוי הבא הוא טאוטולוגיה:

$$\left((x'\to y)\vee(x'\wedge z')\right)'\to(y\wedge z)?$$

(כאשר ' מסמן שלילה). (8 נק')

ב. פשט את הביטוי המקורי לצורות דיסיונקטיבית וקוניונקטיבית נורמליות. (12 נק')

<u>שאלה 7</u>

א. מתוך כיתה של 30 תלמידים המורה בוחר 10 תלמידים לייצוג בחידון. בכמה אופנים שונים ניתן לבחור אותם, אם:

1. המורה אינו מעוניין לבחור בחמישה תלמידים מסוימים? (6 נק')
2. המורה יבחר תמיד בארבעה תלמידים מסוימים? (6 נק')

ב. מהו המקדם של x^5 בביטוי $(x-3)^8$? (8 נק')

בהצלחה!!!

דף נוסחאות למבחן במתמטיקה דיסקרטית

תורת הקבוצות

קבוצות שוות – תת קבוצה -

$A=B \Leftrightarrow \{x\in A \Leftrightarrow x\in B\}$

$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ ו- $B\subseteq A$

איחוד $A\cup B=\{x: x\in A$ או $x\in B\}$

תכונות איחוד-

$A\cup B=B\cup A$.

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$A\cup A=A$

$A\cup\emptyset=A$

חיתוך $A\cap B=\{x: x\in A$ ו- $x\in B\}$

תכונות החיתוך

$A\cap B=B\cap A$.

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

חיתוך מעל איחוד

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

נסמן ב- $|A|$ מספר האיברים של הקבוצה

קבוצת חזקה $|P(A)|=2^{|A|}$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

הפרש קבוצות

$A\setminus B=\{x: x\in A$ ו- $x\notin B\}$.

משלים

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

אינדוקציות

יהי T_n משפט.

נניח שנכונות של המשפט T_n תלויה ב-n

אם

(1) T_1 מתקיימים (כלומר, T_1 נכון עבור $n=1$);

(2) אם T_m מתקיים, אזי T_{m+1} מתקיים;

אזי T_n מתקיים עבור $n\in\mathbf{N}$ כלשהו.

נוסחאות הכפל המקוצר

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

רלציות

מכפלה קרטזית

$A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$

תכונות של מכפלה קרטזית-

$A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B$;

$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.

תחום וטווח

$\mathrm{Domain}(R)=\{x\in A: \exists y\in B: (x,y)\in R\}$

$\mathrm{Range}(R)=\{y\in B: \exists x\in A: (x,y)\in R\}$

רלציה הופכית

$R^{-1}=\{(b,a)\in B\times A: (a,b)\in R\}$ או

$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$.

תכונות של רלציה הופכית-

$(R^{-1})^{-1}=R$, $\mathrm{Domain}(R^{-1})=\mathrm{Range}(R)$,

$\mathrm{Range}(R^{-1})=\mathrm{Domain}(R)$

$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$, $(R\cap S)^{-1}=$

$=R^{-1}\cap S^{-1}$, $R\subseteq S\Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

כפל רלציות

$R\circ S=\{(a,c): \exists b\in B: (a,b)\in R$ ו- $(b,c)\in S\}$

או בכתיב שונה

$a(R\circ S)c \Leftrightarrow \exists b\in B: aRb$ ו- bSc

תכונות כפל רלציות-

$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$;

$R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$;

$V\circ R\subseteq V\circ S$, $R\subseteq S\Rightarrow R\circ T\subseteq S\circ T$,

$R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$

רלצית שקילות (E) היא רלציה רפלקסיבית סימטרית וטרנזיטיבית

רפלקסיבית- $aRa, \forall a\in A$

סימטרית- $xRy \Leftrightarrow yRx$

טרנזיטיבית aRb ו- $bRc \Rightarrow aRc$

חלוקה-אם מתקיימים שני התנאים

1. $\bigcup A_K=A$

2. $A_i\bigcap A_j=\emptyset \quad \forall i\neq j$

מחלקת שקילות- $I_{(a)}=\{x: (a,x)\in E\}$

פונקציות

רלציה R מקבוצה A לקבוצה B נקראת **פונקציה** מ- A ל- B, אם aRb_1 ו- $aRb_2 \Rightarrow b_1=b_2$.

אם $\mathrm{Domain}(f)\subset A$, אזי הפונקציה נקראת <u>פונקציה חלקית</u> מ- A ל- B

אם $\mathrm{Domain}(f)=A$, מכנים את הפונקציה הזאת <u>פונקציה מלאה</u> מ- A ל- B

חד חד ערכית

$(\forall a_1,a_2\in A) \quad f(a_1)=f(a_2)\Rightarrow a_1=a_2$

על

$\forall b\in B\ \exists a\in A: f(a)=b$.

הרכבת פונקציות

$f: A\to B$, $g: B\to C$, $h: A\to C$

$h=f\cdot g$ ברור, ש- $(f\cdot g)(x)=g(f(x))$.

הופכית

f **הפיכה אם ורק אם היא חד-חד-ערכית ועל.**

f^{-1} היא פונקציה חלקית מ- B ל- A.

המקור של B_1:

$f: A\to B$ **פונקציה.** $B_1\subseteq B$. **המקור של** B_1

$f^{-1}(B_1)=\{x\in A: f(x)\in B_1\}$

תכונות של מקור

$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$,

$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$,

$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$,

$f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$

המשך לדף נוסחאות במתמטיקה דיסקרטית

קומבינטוריקה

עקרון החיבור

אם נתון שלכל $i \neq j$ לכל $A_i \cap A_j = \emptyset$, אזי

מתקיים:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

עקרון הכפל

נניח שצריכות להתקיים n פעולות $P_1, \ldots, P_n$

אחת אחרי שניה. אם אפשר לבצע פעולה

P_1 ב- m_1 אפשרויות, פעולה P_2 ב- m_2 אפשרויות, ...,

פעולה P_n ב- m_n אפשרויות, אזי כל n פעולות $P_1, \ldots, P_n$

אפשר לבצע ב- $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ אפשרויות

צירופים

מספר צירופים של k איברים מתוך n מסומן ב- $C(n,k)$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

תכונות

$$C(n,k) = C(n,n-k),\ k = 0,1,\ldots,n$$

$$C(n,0) = C(n,n) = 1$$

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$$

תהי A קבוצה סופית כלשהי, $|A|=n$, מתקיים:

$$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

תמורות

$P(n)$=**מספר התמורות על n איברים.**

$$P(n) = n!.$$

חליפות

$$P(n,k) = C(n,k)k! = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(n,n) = P(n).$$

בינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^{n-k} b^k$$

תכונות

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0$$

סדר חלקי

סדר חלקי היא רלציה רפלקסיבית, אנטיסימטרית, וטרנזטיבית.

רפלקסיביות- $\forall a \in A \quad aRa$.

אנטיסימטריות- $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$;

טרנזיטיביות- $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

קבוצה A, עם רלציית סדר חלקי מעליה נקראת <u>קבוצה סדורה חלקית.</u>

רלציית סדר חלקי נסמן ב-$\preceq$.

איבר מינימאלי אם $(x \in A) \wedge (x \le a) \Rightarrow (x = a)$

איבר מקסימלי $(x \in A) \wedge (b \le x) \Rightarrow (x = b)$

איבר a בקבוצה סדורה חלקית A, נקרא **האיבר הקטן ביותר**

אם עבור כל $x \in A$ מתקיים $a \le x$.

איבר b בקבוצה סדורה חלקית A, נקרא **האיבר הגדול ביותר**

אם עבור כל $x \in A$ מתקיים $x \le b$.

סדר מלא

אם עבור כל $b \in A, a \in A$ מתקיים $a \le b$ או $b \le a$.

המשך לדף נוסחאות במתמטיקה דיסקרטית

לוגיקה מתמטית

פסוק

הוא משפט אשר ערכו הוא אמת או שקר (True or False)

פסוקים מורכבים

הפסוק המסומן ב-$Q \vee P$ אמיתי אם ורק אם P הוא אמיתי או Q הוא אמיתי

הפסוק שמסומן ב-$Q \wedge P$ אמיתי אם ורק אם גם P הוא אמיתי וגם Q הוא אמיתי

$\overline{P}$=שלילה של P. $\overline{P}$ מקבל ערך אמת אם ורק אם P מקבל ערך שקר.

גרירה

$P \to Q$ שקרי אם ורק אם P אמיתי ו- Q שקרי.

שקילות

$P \leftrightarrow Q$ אמיתי אם ורק אם P אמיתי

ו- Q אמיתי או P שקרי ו-Q שקרי

פעולות על קבועים לוגיים

$\overline{F} = T, \overline{T} = F$;

$F \wedge F = F, F \wedge T = F, T \wedge F = F, T \wedge T = T$;

$F \vee F = F, F \vee T = T, T \vee F = T, T \vee T = T$;

$F \to F = T, F \to T = T, T \to F = F, T \to T = T$;

$F \leftrightarrow F = T, F \leftrightarrow T = F, T \leftrightarrow F = F, T \leftrightarrow T = T$

תכונות

$A \vee B = B \vee A$.

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

$A \wedge B = B \wedge A$.

$(A \wedge B) = (B \wedge A)$.

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$;

$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

חוקי דה מורגן

$\overline{(A \vee B)} = (\overline{A} \wedge \overline{B})$

$\overline{(A \wedge B)} = (\overline{A} \vee \overline{B})$

טוטולוגיה

אם $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = T$ עבור כל $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

סתירה

אם $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = F$ עבור כל $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

שימוש בטוטולוגיה

1. $(A \to B) = (\overline{A} \vee B)$

כלומר $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

2. $(A \leftrightarrow B) = (\neg A \to B) \wedge (\neg B \to A)$

כלומר $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

פונקציות בוליאניות

פונקציה בוליאנית של משתנה אחד

$f:\{0,1\} \to \{0,1\}$

פונקציה של שתי משתנים

$f:[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

פעולות על משתנים בוליאנים

פעולות בוליאניות	קשרים לוגיים
$'$	$\neg$
$\cdot$	$\wedge$
$\vee$	$\vee$
$\to$	$\to$
$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$

$x \vee x = x, x \cdot x = x, x \vee y = y \vee x, x \cdot y = y \cdot x,$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$

$x \vee 1 = 1, x \cdot 1 = x, x \vee 0 = x, x \cdot 0 = 0,$

$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z), x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z),$

$x \vee (y \cdot x) = x, x \cdot (y \vee x) = x, (x \vee y)' = x' \cdot y',$

$(x \cdot y)' = x' \vee y', x \vee x' = 1, x \cdot x' = 0.$

$x \leftrightarrow x = 1, x \leftrightarrow x' = 0, x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x,$

$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z).$

$1 \leftrightarrow x = x, 0 \leftrightarrow x = x', x' \leftrightarrow y' = x \leftrightarrow y,$

$x \to x = 1, x \to x' = x', x' \to x = x, 1 \to x = x,$

$0 \to x = 1, x \to 1 = 1, x \to 0 = x'$

פונקציות בוליאניות של n משתנים

מכפלה קרטזית $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ מסומנת ב- A^n

$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ נקראת פונקציה בוליאנית על n משתנים

שוויון פונקציות

שתי פונקציות בוליאניות f ו- g שוות זו לזו, אם ורק אם

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ עבור משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ בוליאנים

צורה דיסיונקטיבית נורמלית

ביטוי נמצא בצורה דיסיונקטיבית נורמלית אם הוא מהצורה:

$$(P_{11} \wedge P_{12} \wedge \cdots \wedge P_{1i_1}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2} \wedge \cdots \wedge P_{ni_n})$$

כאשר P_{ij} הוא פסוק בסיסי או שלילתו.

צורה קוניונקטיבית נורמלית

ביטוי נמצא בצורה קוניונקטיבית נורמלית אם הוא מהצורה:

$$(P_{11} \vee P_{12} \vee \cdots \vee P_{1i_1}) \wedge \cdots \wedge (P_{n1} \vee P_{n2} \vee \cdots \vee P_{ni_n})$$

כאשר P_{ij} הוא פסוק בסיסי או שלילתו.