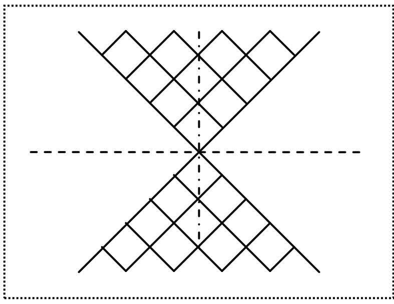
פתרון הבוחן

1. א. הפונקציה f מוגדרת כאשר השורש במכנה גדול מאפס, כלומר כאשר $y^2-x^2>0$,
כלומר כאשר $(y-x)(y+x)>0$, לכן התחום מורכב מהתחומים הבאים :
התחום שבו $y-x>0$ וגם $y+x>0$ שהוא התחום העליון באיור.
התחום שבו $y-x<0$ וגם $y+x<0$ שהוא התחום התחתון באיור.



כאשר הקווים המקווקוים מתארים את צירי ה- x וה- y .

ב. אם ניקח את המסלול $(0,t)$ נקבל ש-$g(0,t)=1$ ואז גם אם $t\to 0$ נקבל שהגבול שווה ל-1
ולכן g איננה רציפה בנקודה $(0,0)$.

2. f נתונה כ-$f(x,y)=x^2-xy+y^4$, ע"י גזירה לפי x ו- y בהתאמה והשוואה ל-0 נקבל ש-
$f_x=2x-y=0$, $f_y=-x+4y^3=0$. לכן $y=2x$ ו-$x=4y^3$. משתי המשוואות האלו נקבל
ש- $x=32x^3$, לכן $x=0,\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ ו- $y=0,\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. לכן הנקודות החשודות הן
$(0,0),(\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}),(-\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$ ונשאר לבדוק אם אלו נקודות מקסימום או מינימום.
כעת נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של f :
$f_{xx}(x,y)=2$, $f_{yy}(x,y)=12y^2$, $f_{xy}(x,y)=-1$. נגדיר M להיות
$M=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2$. אז בנקודה $(0,0)$ M שווה ל-1- ולכן $(0,0)$
היא נקודת אוכף. בנקודות $(\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}),(-\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$ M שווה ל-2 וכיוון ש-$f_{xx}>0$
אלו נקודות מינימום.

3. א. נתון כי $y=e^t$, $x=\ln(t)$, $f(x,y)=\sin(x+y)$, לכן

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}=\cos(x+y)\frac{1}{t}+\cos(x+y)e^t=$$

$$\cos(\ln(t)+e^t)\frac{1}{t}+\cos(\ln(t)+e^t)e^t$$

ב. נתון כי $y=e^t$, $x=t^2$, $f(x,y)=ye^{x^2-y}$, לכן

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}=2xye^{x^2-y}2t+(e^{x^2-y}-ye^{x^2-y})e^t=$$
$$2t^2e^te^{t^4-e^t}2t+(e^{t^4-e^t}-e^te^{t^4-e^t})e^t=4t^3e^{t^4+t-e^t}+e^{t^4+t-e^t}-e^{t^4+2t-e^t}$$

4. תרגיל זה יצא יותר קשה ממה שתוכנן, תוכנן במקור שיהיו 6 נקודות קיצון ומי שקיבל אותן קיבל את כל הנקודות, בכל מקרה ישנן עוד נקודות קיצון.

נתון $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ו- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. עלינו לפתור את המערכת $2x+\lambda\frac{2x}{a^2}=0,\ 2y+\lambda\frac{2y}{b^2}=0,\ 2z+\lambda\frac{2z}{c^2}=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. כלומר $x(1+\lambda\frac{1}{a^2})=0,\ y(1+\lambda\frac{1}{b^2})=0,\ z(1+\lambda\frac{1}{c^2})=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

כעת יש להבדיל בין 4 מקרים:

א. אם $x=y=z=0$ אז לא מתקיים האילוץ ולכן לא מתקבלות נקודות קיצון במקרה זה.
ב. אם $x=y=0$ ו- $z\neq 0$ אז מהאילוץ נקבל ש- $z=\pm c$, לכן נקבל שתי נקודות $(0,0,\pm c)$.
באותו אופן אם $x=z=0$ ו- $y\neq 0$ נקבל $(0,\pm b,0)$ ואם $y=z=0$ ו- $x\neq 0$ נקבל $(\pm a,0,0)$. מי שמצא את הנקודות האלו קיבל את מלוא הניקוד.
ג. אם $x=0$ ו- $y,z\neq 0$ אז כיוון ש- $y(1+\lambda\frac{1}{b^2})=0,\ z(1+\lambda\frac{1}{c^2})=0$ נקבל כי $1+\lambda\frac{1}{b^2}=0,\ 1+\lambda\frac{1}{c^2}=0$ ולכן $b^2=c^2$ מהאילוץ נקבל שכל הנקודות החשודות הן מהצורה $y^2+z^2=b^2$, $x=0$. באותו אופן, במקרה ש- $y=0$ ו- $x,z\neq 0$ נקבל שהנקודות החשודות הן מהצורה $x^2+z^2=a^2$, $y=0$ ובמקרה ש- $z=0$ ו- $x,y\neq 0$ נקבל שהנקודות החשודות הן מהצורה $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.
ד. במקרה ש- $x,y,z\neq 0$ נקבל מהמשוואות $x(1+\lambda\frac{1}{a^2})=y(1+\lambda\frac{1}{b^2})=z(1+\lambda\frac{1}{c^2})=0$ ש- $1+\lambda\frac{1}{a^2}=1+\lambda\frac{1}{b^2}=1+\lambda\frac{1}{c^2}=0$ ולכן $a^2=b^2=c^2$. לכן מהאילוץ נקבל ש- $x^2+y^2+z^2=a^2$.

5. נתון $f(x,y,z)=x^2y^2z^3$ ווקטור כיוון $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, לכן הנגזרת של f בנקודה $(1,1,2)$ בכיוון $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ נתונה לפי:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}f_x(1,1,2)+\frac{1}{\sqrt{2}}f_y(1,1,2)+0f_z(1,1,2)=8\sqrt{2}+8\sqrt{2}=16\sqrt{2}.$$