לות חשובים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ ,\ \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=1$$

יאת גבולות עבור 2 משתנים

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=?$$

צאים גבול ע"י הכנסת x ואז y לתוך ה-lim, ואז ההיפך.
יש שוויון אז יש גבול והוא מה שקיבלנו. אם אין
ויון, אז אין גבול.

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)\overset{?}{=}\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

יקת רציפות

קציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $M(x_0,y_0)$ אם:
מוגדרת בנקודה זו (יש ערך עבור $f(x_0,y_0)$)
קיים גבול והגבול שווה לערך הפונ' בנקודה.

רה של פונ' מורכבת: כלל השרשרת

$z=f(u,v)\ ,\ u=\varphi(x,y)\ ,\ v=\psi(x,y)$

$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=F(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

בל ביטוי שיש בו גם x,y וגם u,v. צריך להציב u,v
$u=\varphi(x,y)\ ,\ v=\psi(x,y)$.

ב אפשרי

$w=f(z,u,v,s)=F(x,y)$

$z=z(x,y),u=u(x,y),v=v(x,y),s=s(x,y)$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}$$

ב נוסף

$z=f(x,y,u,v)=F(x)$

$y=y(x),u=u(x),v=v(x)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

רת של פונקציה סתומה

יה סתומה: $F(x,y)=0$

מא: $e^y-e^x+xy=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

רות חלקיות מסדרים גבוהים יותר

$z=f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=f''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=f''_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=f''_{yy}$$

שפט: $f''_{yx}=f''_{xy}$

רת מכוונת

צים לגזור את פונ' u בכיוון וקטור s.

$$\frac{du}{ds}=gradu\cdot\frac{s}{|s|}$$

רה: $|s|$ זה אורך הוקטור s.

ימר, מחשבים את וקטור gradient של u ומכפילים
לרית עם הווקטור s מנורמל ע"י האורך שלו.

ומעות ובניית גרדיאנט

טור הגרדיאנט מאונך למישור המשיקים למשטח בנקודה
ויימת.

$$gradF=\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

חאות שימושיות

וח פנים של כדור: $4\pi R^2$

ח כדור: $\frac{4}{3}\pi R^3$

וואת ישר משיק לעקום בנקודה (x_0,y_0)

$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$

משוואת מישור משיק למשטח בנקודה (x_0,y_0,z_0)

כשהמשטח נתון בצורה סתומה: $F(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0$$

כשהמשטח נתון בצורה מפורשת: $z=f(x,y)$

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

משוואת ישר משיק לעקום הנתון בצורה פרמטרית

$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\chi(t)$

נקודה t_0, כלומר $x=\varphi(t_0),y=\psi(t_0),z=\chi(t_0)$

משוואת הישר המשיק לעקום בנקודה t_0 :

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}=\frac{z-\chi(t_0)}{\chi'(t_0)}$$

משוואת מישור נורמל לעקום הנתון בצורה פרמטרית

יש אינסוף נורמלים לעקום (קווים ישרים המאונכים למשיק בנקודת ההשקה). כל הנורמלים האלה נמצאים על מישור.

$(x-\varphi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)+(y-\psi(t_0))\cdot\psi'(t_0)$
$+(z-\chi(t_0))\cdot\chi'(t_0)=0$

משוואת ישר משיק לעקום המוגדר ע"י חיתוך 2 משטחים

העקום מוגדר ע"י חיתוך:

$\Phi_1(x,y,z)=0\ ,\ \Phi_2(x,y,z)=0$

משוואת הישר המשיק לעקום בנקודה (x_0,y_0,z_0) :

$$\frac{x-x_0}{\Delta_1}=\frac{y-y_0}{\Delta_2}=\frac{z-z_0}{\Delta_3}$$

הגדרת Δ למשוואות הקודמות

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}\ ,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

דיפרנציאל

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3$$

מעבר דיפרנציאלי

$v(x)=u(t)\Rightarrow$

$d(v(x))=d(u(t))\Rightarrow$

$[v(x)]'_x dx=[u(t)]'_t dt$

נקודות קיצון

משפט: אם נקודה היא נקודת קיצון, אזי כל הנגזרות החלקיות בנקודה שוות אפס או לא קיימות.

מציאת נקודות קיצון ללא אילוצים

1) מוצאים נקודות חשודות ע"י השוואת נגזרות חלקיות לאפס

2) נחשב את $AB-C^2$,

כאשר: $A=f''_{xx}\ ,\ B=f''_{yy}\ ,\ C=f''_{xy}$

3) נציב ב- $AB-C^2$ את הנקודות החשודות ונבדוק את הסימן מול התנאים הבאים:

$AB-C^2>0\wedge A>0\Rightarrow\min$

$AB-C^2>0\wedge A<0\Rightarrow\max$

$AB-C^2<0\Rightarrow saddle$

$AB-C^2=0\Rightarrow unknown$

נקודות קיצון בפונקציה עם שני משתנים + אילוץ

נתונה פונקציה $f(x,y)$ ואילוץ $\varphi(x,y)=0$

דרך 1:

אם ניתן לבודד בקלות את אחד המשתנים מהאילוץ אז נבודד אותו ונציב אותו בפונקציית המטרה. אז נפתור כבעיית קיצון רגילה ללא אילוצים.

דרך 2:

משתמשים בכפלי לגרנז'.

$F=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$

מוצאים נקודות חשודות המקיימות:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\ ,\ \varphi(x,y)=0$$

מוצאים דיפרנציאל שני ומנסים לקבוע לו סימן:

$$d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2$$

אם $d^2F>0$ אז מינימום

אם $d^2F<0$ אז מקסימום

אם $d^2F=0$ אז נדרשת חקירה נוספת

אם d^2F משנה סימן אז לא נקודת קיצון,

למשל $d^2F=17dxdy$

אפשרות נוספת לבחון אם זה נקודת קיצון:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x(p_0) & \varphi'_y(p_0)\\ \varphi'_x(p_0) & F''_{xx}(p_0) & F''_{xy}(p_0)\\ \varphi'_y(p_0) & F''_{xy}(p_0) & F''_{yy}(p_0)\end{vmatrix}$$

אם $\Delta>0$ אז מינימום

אם $\Delta<0$ אז מקסימום

מציאת נקודות קיצון בתחום סגור

1) מוצאים נקודות קיצון מקומיות בדרך הרגילה מבלי להתחשב באילוץ. אז בודקים אם הן עונות על תנאי האילוץ.

2) מוצאים נקודות על שפת האילוץ בעזרת לגרנז'.

3) מוצאים נקודות על הישרים התוחמים את התחום, לדוגמה נציב $x=0$ כדי למצוא נקודות על קצה התחום הנוסח ע"י הישר $x=0$.

4) בודקים נקודות בפינות המחברות בין ישרים תוחמים ובין האילוץ.

אינטגרציה בחלקים

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

אינטגרל כפול

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

משמעות: חישוב הנפח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x,y)$ לבין מישור ה- x,y בתחום D.

חישוב שטח התחום D

$$\iint_D dxdy$$

חישוב נפח גוף הכלוא בין 2 קליפות

Φ_1 - קליפה תחתונה

Φ_2 - קליפה עליונה

D - הטלת הגוף על מישור x,y

$$V=\iint_D \Phi_2(x,y)-\Phi_1(x,y)dxdy$$

חישוב אינטגרל כפול

$$\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\int_{y=c}^{y=d}\left[\int_{x=\psi_1(x)}^{x=\psi_2(x)} f(x,y)dx\right]dy$$

החלפת משתנים

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_R f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J|\cdot dudv$$

תכונות היעקוביאן

$x=f(u,v)\ ,\ y=g(u,v)\ ,\ u=\varphi(x,y)\ ,\ v=\psi(x,y)$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,s)}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(r,s)}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}$$

חישוב היעקוביאן

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{J}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

קורדינטות קוטביות

$x=r\cos\varphi\ ,\ y=r\sin\varphi\ ,\ J=r$

1) טוב כשיש תחום עם סימטריה מעגלית או כשבפונקציה יש ביטוי מהצורה x^2+y^2 .

2) כדי להבין איך r,φ משתנים פשוט מציבים את x,y ע"י r,φ במשוואות שמגדירות את D.

3) מעבר לאליפסה: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=R^2$

$x=a\cdot r\cos\varphi\ ,\ y=b\cdot r\sin\varphi\ ,\ J=ab\cdot r$

דוגמא: מעגל פשוט

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=\iint_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi$$

אינטגרל משולש

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_{x=h_1}^{x=h_2}\left[\int_{y=\varphi_1}^{y=\varphi_2}\left[\int_{z=f_1}^{z=f_2} f(x,y,z)dz\right]dy\right]dx$$

נפח הגוף D

$$\iiint_D dxdydz$$

החלפת משתנים

$x,y,z\to u,v,w$

$x=\varphi(u,v,w)\ ,\ y=\psi(u,v,w)\ ,\ z=\chi(u,v,w)$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_R f\left[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\right]\cdot|J|\ dudvdw$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

קורדינטות גליליות

$x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi\ ,\ z=z\ ,\ J=\rho$

$r>0\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_R f\left[\ \right]\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi dz$$

קורדינטות כדוריות

$x=r\sin\theta\cos\varphi\ ,\ y=r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ z=r\cos\theta$

$J=r^2\sin\theta$

$r\ge 0\ ,\ 0\le\theta\le\pi\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi$

נגזרות

$\left[x^n\right]'=n\cdot x^{n-1}$

$\left[u\cdot v\right]'=u'\cdot v+v'\cdot u\ ,\ \left[\frac{u}{v}\right]'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$

$\left[\ln x\right]'=\frac{1}{x}\ ,\ \left[\log x\right]'=\frac{1}{x}\log e$

$\left[e^x\right]'=e^x\ ,\ \left[a^x\right]'=\ln a\cdot a^x$

$f'_x(x)=f'_u(u)\cdot u'_x$

$\left[\sin x\right]'=\cos x\ ,\ \left[\cos x\right]'=-\sin x$

לוגריתמים

$\ln 1=0\ ,\ \ln(0)=-\infty$

$C\log_a A=\log_a A^C$

$\log_a A-\log_a B=\log_a\frac{A}{B}$

$\log_e x=\ln x\ ,\ \log_a a=1$

$\frac{\ln b}{\ln a}=\log_a b$

טריגונומטריה

$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ,\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

אינטגרלים שימושיים

$\int\sin^2 xdx=-\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x+\frac{1}{2}x$

$\int\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+\frac{1}{2}x$