בוחן אמצע- מתמטיקה לכימאים א'

1. נתונות הפונקציות:

$$f:\Re \to \Re^{+} \quad f(x)=8^{2x}$$
$$g:\Re \to \Re \quad g(x)=\log_8(x^2-9)$$

א. מהו תחום ההגדרה של $f(x)$? ומהו תחום ההגדרה של $g(x)$?
ב. שרטטו את $f(x)$.
ג. (1) האם קיימת ל $f(x)$ פונקציה הפוכה? אם כן- מהי? אם לא- נמקו מדוע.
(2) האם קיימת ל $g(x)$ פונקציה הפוכה? אם כן- מהי? אם לא- נמקו מדוע.
ד. מהי $g\circ f$ (כלומר $f(g(x))$)? ומה תחום הגדרתה?

<u>פתרון:</u>

א. תחום הגדרה של $f(x)$: $x\in\Re$

תחום הגדרה של $g(x)$: $x^2-9>0 \Rightarrow x<-3 \ or \ x>3$

ב.

ג. (1) $f(x)$ היא חד- חד ערכית ועל, לכן קיימת לה פונקציה הפוכה. מציאת הפונקציה ההפוכה: $y=8^{2x}\Rightarrow \log_8 y=2x \Rightarrow x=\frac{\log_8 y}{2}$.

נחליף את x ו- y ונקבל: $f^{-1}(x)=\frac{\log_8 x}{2}$

(2) ל- $g(x)$ לא קיימת פונקציה הפוכה, כיוון שהיא איננה חח"ע.

דוגמה נגדית: $\log_8(5^2-9)=\log_8\left((-5)^2-9\right) \Rightarrow g(5)=g(-5)$ אבל $5\neq -5$

ד. $g\circ f=f(g(x))=f\left(\log_8\left(x^2-9\right)\right)=8^{2\log_8\left(x^2-9\right)}=8^{\log_8\left(x^2-9\right)^2}=\left(x^2-9\right)^2$

תחום הגדרה של $g\circ f$: $x<-3 \ or \ x>3$

הסבר: תחום הגדרה של $g\circ f$ שווה לת.ה של $g\circ f$ כפי שפיתחנו לעיל (שהוא $x\in\Re$), חיתוך עם ת.ה של $g(x)$ (שהוא $x<-3 \ or \ x>3$)

2. א. (1) האם קיימת/ קיימות לפונקציה: $f(x)=\frac{|x|}{2x}$ נקודת/ נקודות אי-רציפות? אם כן מה היא/מהן- ומאיזה סוג?
(2) שרטטו את $f(x)$.

ב. (1) מצאו את ערך k כך שהפונקציה: $g(x)=\begin{cases} kx^2 & x\le 2 \\ 2x+k & x>2 \end{cases}$ תהיה רציפה לכל x .
(2) שרטטו את $g(x)$ עבור k שמצאתם בסעיף (1)

<u>פתרון:</u>

א. (1) תחום ההגדרה של $f(x)$ הינו $x \neq 0$.

נרשום את $f(x)$ ללא ערך מוחלט כך: $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} & x > 0 \\ \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$

כעת, קל למצוא את הגבולות החד צדדים ב- $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

שני הגבולות החד צדדיים ב- $x = 0$ קיימים (אינם שווים $\pm\infty$), אך אינם שווים זה לזה, ולכן **קיימת נקודת אי רציפות סליקה ב-** $x = 0$

(2)

ב. הנקודה $x = 2$ חשודה כנקודת אי רציפות, כיוון שבה משתנה הגדרת הפונקציה.
נבדוק את הגבולות החד- צדדיים בנקודה זו:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} kx^2 = \lim_{x \to 2^-} k2^2 = 4k$$
$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2+} 2x + k = \lim_{x \to 2+} 2 \cdot 2 + k = 4 + k$$

כדי שהפונקציה תהיה רציפה גם בנקודה $x = 2$ צריך ששני הגבולות החד- צדדיים יהיו שווים זה לזה, כלומר $4k = 4 + k \Leftarrow 3k = 4 \Leftarrow k = \frac{4}{3}$

קיבלנו, שעבור $k = \frac{4}{3}$ הגבולות החד צדדיים שווים זה לזה, ושווים לערך בנקודה $g(2) = 5\frac{1}{3}$.

(2)

3. חשבו 2 מבין 3 הגבולות הבאים:

$$1.\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\qquad 2.\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin(x^2-5x)}}\qquad 3.\lim_{x\to\infty}\left(\ln x-x^2\right)$$

<u>פתרון:</u>

$$1.\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2-4x\right)}{x+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{4x}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x}=2$$

$$2.\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin(x^2-5x)}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{\sin(x^2-5x)}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin(x^2-5x)}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2-5x)}}$$

$$=*\,e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1\cdot(-\sin x)}{\cos x}}{(2x-5)\cdot\cos(x^2-5x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{0}{1}}{-5\cdot 1}}=e^0=1$$

$$3.\lim_{x\to\infty}\left(\ln x-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\ln x\left(1-\frac{x^2}{\ln x}\right)^{**}=-\infty$$

** חישוב עזר: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln x}=*\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}2x^2=\infty$

הערות: הסימון * מסמן שימוש בכלל לופיטל
הסימון ** מסמן מעבר לחישוב עזר.

4. א. גזרו את הפונקציה: $y=\sqrt{\frac{\ln^{10}\left(5^{7x}\right)}{e^{\cos^3 x}}}$

ב. מצאו את הנגזרת (y') בנקודה בה $x=0$ עבור הפונקציה:

$$\ln\left(7y^3\right)-x^2y+3y^2x^4=e^{xy}+5x^2$$

ג. גזרו לפי הגדרת הנגזרת את הפונקציה:

$$f(x)=4x^3-7x^2+9x-3$$

<u>פתרון:</u>

א.

$$y'=\left(\sqrt{\frac{\ln^{10}\left(5^{7x}\right)}{e^{\cos^3 x}}}\right)'=\frac{\dfrac{10\ln^9\left(5^{7x}\right)\cdot\dfrac{1}{5^{7x}}\cdot 5^{7x}\cdot\ln 5\cdot 7\cdot e^{\cos^3 x}-e^{\cos^3 x}\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)\cdot\ln^{10}\left(5^{7x}\right)}{e^{2\cos^3 x}}}{2\cdot\sqrt{\dfrac{\ln^{10}\left(5^{7x}\right)}{e^{\cos^3 x}}}}$$

$$=\frac{70\ln 5\cdot\ln^9\left(5^{7x}\right)\cdot e^{\cos^3 x}+3e^{\cos^3 x}\cdot\cos^2 x\cdot\sin x\cdot\ln^{10}\left(5^{7x}\right)}{2e^{2\cos^3 x}\cdot\dfrac{\sqrt{\ln^{10}\left(5^{7x}\right)}}{\sqrt{e^{\cos^3 x}}}}$$

$$=\frac{\left(e^{\cos^3 x}\right)^{\frac{3}{2}}\ln^9\left(5^{7x}\right)\left(70\ln 5+3\cos^2 x\cdot\sin x\cdot\ln\left(5^{7x}\right)\right)}{2e^{2\cos^3 x}\ln^5\left(5^{7x}\right)}=\frac{\ln^4\left(5^{7x}\right)\left(70\ln 5+3\cos^2 x\cdot\sin x\cdot\ln\left(5^{7x}\right)\right)}{2\sqrt{e^{2\cos^3 x}}}$$

ב. ראשית, נציב $x=0$ בפונקציה הנתונה על מנת למצוא את y בנקודה זו:

$$\ln\left(7y^3\right)-0^2y+3y^2 0^4=e^{0y}+5\cdot 0^2$$

$$\ln\left(7y^3\right)=1\Rightarrow 7y^3=e\Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{e}{7}}$$

כעת, נגזור את הפונקציה הנתונה כנגזרת של פונקציה סתומה:

$$\frac{7\cdot 3y^2y'}{7y^3}-\left(2xy+x^2y'\right)+3\left(2yy'x^4+4x^3y^2\right)=e^{xy}\left(y+xy'\right)+10x$$

נציב את $x=0$ ו- $y=\sqrt[3]{\frac{e}{7}}$ במשוואה של נגזרת הפונקציה הסתומה שקיבלנו לעיל:

$$\frac{3\left(\sqrt[3]{\frac{e}{7}}\right)^2y'}{\left(\sqrt[3]{\frac{e}{7}}\right)^3}-0+0=e^0\left(\sqrt[3]{\frac{e}{7}}+0\right)+0$$

$$\frac{3y'}{\sqrt[3]{\frac{e}{7}}}=\sqrt[3]{\frac{e}{7}}\Rightarrow\ y'=\frac{\left(\frac{e}{7}\right)^{\frac{2}{3}}}{3}$$

כלומר, $y'(0)=\dfrac{\left(\frac{e}{7}\right)^{\frac{2}{3}}}{3}$

ג. נגזור לפי הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^3-7(x+h)^2+9(x+h)-3-\left(4x^3-7x^2+9x-3\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-7\left(x^2+2xh+h^2\right)+9x+9h-3-4x^3+7x^2-9x+3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3-7x^2-14xh-7h^2+9x+9h-3-4x^3+7x^2-9x+3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3-14xh-7h^2+9h}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{h\left(12x^2-14x+12xh+4h^2-7h+9\right)}{h}=\lim_{h\to 0}12x^2-14x+9=12x^2-14x+9$$

5. מצאו את נקודות החיתוך בין $y=|x-5|$ ובין $y=x^2-5x+6$

<u>פתרון:</u>

נכתוב את הפונקציה $y=|x-5|$ ללא ערך מוחלט, כך:

$$y=\begin{cases}x-5 & x-5\ge 0\\ -(x-5) & x-5<0\end{cases}\Rightarrow\quad y=\begin{cases}x-5 & x\ge 5\\ -x+5 & x<5\end{cases}$$

כעת, נחפש נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות, עבור $x\ge 5$

$$x^2-5x+6=x-5\Rightarrow x^2-6x+11=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{16-4\cdot 11}}{2}$$

השורש שלילי, ומכאן שעבור $x\ge 5$ אין נקודות חיתוך בין הפונקציות.

- נחפש נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות, עבור $x<5$

$$x^2-5x+6=-x+5\Rightarrow x^2-4x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pm 2\cdot\sqrt{3}}{2}$$
$$=2\pm\sqrt{3}$$

קיבלנו שתי נקודות: $x_1=2+\sqrt{3}\Rightarrow x_1=3.73$ ו- $x_2=2-\sqrt{3}\Rightarrow x_2=0.27$

$x_1<5$ וגם $x_2<5$, לכן x_1 ו- x_2 הם פתרונות למשוואה, ומכאן שהן נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות.