בס"ד

פתרון מבחן בקורס מתמטיקה לכימאים 84-171-01
דוקטור מירב טופול
<u>תש"ע, סמסטר א', מועד ב'.</u>

1. מצאו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=-1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x-\sin 2x}{x}}{\frac{x+\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\sin 3x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{2\sin 2x}{2x}}{1+\frac{3\sin 3x}{3x}}==\lim_{x\to0}\frac{1-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{1+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1-2\cdot1}{1+3\cdot1}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln x-x\ln(x+5)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\frac{x}{x+5}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x}{x+5}\right)^{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1-\frac{5}{x+5}\right)^{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1-\frac{5}{x+5}\right)^{(x+5)\frac{x}{x+5}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x+5}\ln\left(1-\frac{5}{x+5}\right)^{(x+5)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+5}\left[\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{x+5}\right)^{(x+5)}\right]\right]=$$

$$=1\cdot\ln\left(e^{-5}\right)=-5$$

2. עבור אלו ערכים של פרמטרים A ו-B (אם הם קיימים) הפונקציה הבאה רציפה?

$$f(x)=\begin{cases}\left(1+2^{\left(x^2-x^3\right)^{-1}}\right)^{-1}, & x\neq 0,1\\ A, & x=0\\ B, & x=1\end{cases}$$

בנקודה 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(1+2^{\left(x^2-x^3\right)^{-1}}\right)^{-1}=0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+2^{\left(x^2-x^3\right)^{-1}}\right)^{-1}=0\ .$$

ניקח $A=0$. אז הפונקציה רציפה בנקודה 0.

בנקודה 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(1+2^{\frac{1}{x^2(1-x)}}\right)^{-1}=0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+2^{\frac{1}{x^2(1-x)}}\right)^{-1}=1\ .$$

אז הפונקציה אינה רציפה בנקודה 1 עבור שום ערך של B.

3. גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y=-\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$$

$$y'=\left(-\frac{1}{6}(1-3\cos x)^{-2}\right)'=-\frac{(-2)}{6}(1-3\cos x)^{-3}(1-3\cos x)'=\frac{1}{3}(1-3\cos x)^{-3}\cdot 3\sin x=$$

$$=\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$$

ולכן

$$y'=\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$$

$$e^y=y^x$$

$$\ln e^y=\ln y^x \Rightarrow y=x\ln y \Rightarrow y'=\ln y+\frac{x}{y}y' \Rightarrow y'(y-x)=y\ln y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{y\ln y}{y-x}$$

$$y=(\sin x)^{1/x}$$

$$.\ y'=(\sin x)^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\ln(\sin x)+\frac{1}{x}\cot x\right)$$

4. חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x)=\dfrac{x-2}{e^{2x}}$

$f(x)=(x-2)e^{-2x}$; 1) $Df = R$; $f(x)=0 \to \quad x=2$

2) *signes of* $f(x)$: $(-\infty) \quad - \quad (2) \quad + \quad (+\infty)$

3) *the* graph hasn't a vertical asymptote

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)}{e^{2x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-2e^{2x}} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0 \to$

$y=0$ is a right horizontal asymptote

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^{-2x} = [-\infty\cdot\infty] = -\infty$

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-2)}{x}e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)e^{-2x} = [1\cdot\infty] = \infty$

$\to$ *the* graph hasn't left horizontal or oblique asymptote

5) The first sketch of the graph y = f(x)

6) $f'(x) = \left((x-2)e^{-2x}\right)' = e^{-2x} - 2(x-2)e^{-2x} = (5-2x)e^{-2x}$; $f'(x)=0 \to x=2.5$

the signes of $f'(x)$: $(-\infty) \quad + \quad (0) + \quad (2.5) \quad - \quad (+\infty)$

f(x) is increasing on $(-\infty,2.5)$ and f(x) is decreasing on $(2.5,\infty)$; $y_{max} = y(2.5) = 0.5e^{-5}$

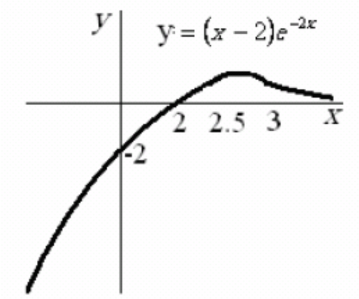
7) $f''(x) = \left((5-2x)e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x} - 2(5-2x)e^{-2x} = (4x-12)e^{-2x}$;

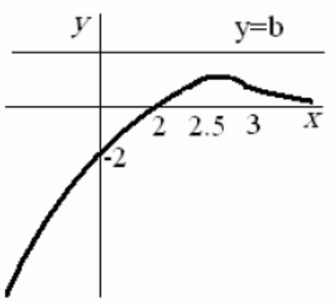
$f''(x)=0 \to x=3$; *signes of* $f''(x)$: $(-\infty) \quad - \quad (3) \quad + \quad (+\infty)$

$x=3 \to$ are the inflection points of the graph y = f(x);

f(x) is concave down on $(-\infty,3)$ and f(x) is concave up on $(3,+\infty)$

8) Final skech of the graph y = f(x)





5. א. מצאו את הערכים הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה $y = x\ln(x)$ בקטע $[\frac{1}{e}, e]$.

הפתרון:
נחשב את הנגזרת: $y' = \ln x + 1$. נשווה אותה ל-0: lnx + 1 = 0 , lnx = -1 , ונקבל $x = \frac{1}{e}$. נחשב ערכי הפונקציה בקצוות: $f(\frac{1}{e}) = -0.37, \quad f(e) = 2.72$

ולכן הערך הקטן ביותר הוא $f(\frac{1}{e}) = -0.37$ והערך הגדול ביותר הוא $f(e) = 2.72$.

ב. נמצא גבול $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\tan^2(4x+8)}{\sin^2(x^2+4x+4)}$. יש כאן מצב שבו $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to-2} \frac{\tan^2(4x+8)}{\sin^2(x^2+4x+4)} = \lim_{x\to-2} \frac{\tan^2(4x+8)}{(4x+8)^2} \cdot (4x+8)^2 \cdot \frac{(x^2+4x+4)^2}{\sin^2(x^2+4x+4)} \cdot \frac{1}{(x^2+4x+4)^2} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to-2} \frac{(4x+8)^2}{(x^2+4x+4)^2} = \lim_{x\to-2} \frac{16(x+2)^2}{\left((x+2)^2\right)^2} = \lim_{x\to-2} \frac{16}{(x+2)^2} = +\infty$$

השתמשנו כאן בגבול המיוחד הראשון:

$\lim\limits_{t\to0} \frac{t^2}{\sin^2 t} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ולכן $\lim\limits_{x\to-2} \frac{(x^2+4x+4)^2}{\sin^2(x^2+4x+4)} = 1$.

כמו כן, מיידית מ $\lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$ נובע ש $\lim\limits_{t\to0} \frac{\tan t}{t} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{t\cos t} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} = 1 \cdot 1 = 1$

ולכן $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\tan^2(4x+8)}{(4x+8)^2} = 1$.

6. חשבו את האינטגרלים הבאים (מסוים ובלתי מסוים):

$$\int (x-1)^2 e^x dx = \int (x^2-2x+1)e^x dx = \int x^2 e^x dx - 2\int xe^x dx + \underbrace{\int e^x dx}_{e^x};$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x,$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x d\left(x^2\right), \int e^x d\left(x^2\right) = 2\int xe^x dx = 2\left(xe^x - e^x\right).$$

$$\int (x-1)^2 e^x dx = 5e^x - 4xe^x + x^2 e^x + c$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{x^4+x^2} dx$$

$$= \int \frac{2x+3}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}\right) dx \to$$

$$a=2, \quad b=3, \quad c=-2, \quad d=-3 \to$$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{-2x-3}{x^2+1}\right) dx = 2\ln x - \frac{3}{x} - \ln(x^2+1) - 3arctgx + c$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} = arctg\left(x+2\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}} = \int_0^{\infty} (1+x)^{-1.5} dx = -2(1+x)^{-0.5}\Big|_0^{\infty} = -2(0-1) = 2$$

7. א. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים הבאים:

$$x^2+y^2=16\ ,\quad x=-1 \quad \text{ו-} \quad x=1$$

השטח הינו:

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{16-x^2}\,dx=2\sqrt{15}+32\arcsin\frac{1}{4}$$

ב. חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל מסיבוב של $y=\frac{x}{2}$, $y=\sqrt{x-1}$ סביב ציר ה-x:

$$\pi\left(\int_0^1\left(\frac{x}{2}\right)^2dx+\int_1^2\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2dx\right)=\pi\left(\int_0^1\frac{x^2}{4}dx+\int_1^2\left(\frac{x^2}{4}-x+1\right)dx\right)=$$
$$\pi\left(\left(\frac{x^3}{12}\right)_0^1+\left(\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{2}+x\right)_1^2\right)=\frac{7\pi}{6}$$

בהצלחה רבה!!!