**חדו"א-1 סמסטר א' תש"ע** **מועד ב'**

מרצה אחראי דר' סטיאנוב פבל. מרצים: פרופ' לויצקי שמעון, דר' אקרמן יבגניה, דר' אוחלוב אלכס, דר' דיצ'מן גדי, דר' אוברוצקי אושרית, דר' טופול מירב, דר' קלפר דביר, דר' מליץ' פינחס.

משך הבחינה 3 ש'. חומר עזר: דף נוסחאות של הסטודנט (שני עמודים בפורמט A4), מחשבון עם צג קטן. לסטודנטים שמוענקת להם ההתאמה – ניתן להשתמש בכפל דפים (ללא צורך בחתימת המרצה). תשובה ללא הסבר אפילו נכונה לא תתקבל.

**שאלות 1 ו- 2 –חובה !**

**שאלה מס' 1 (21%)**

א) (18%) חקור באופן מלא את $f(x)=\dfrac{2-x^2}{e^x}$ (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף $y=f(x)$.

ב) (3%) צייר את סקיצת הגרף של הפונקציה $y=|f(x)|$ ל- $f(x)$ מסעיף א'.

**שאלה מס' 2 (24%)** **פתור 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים :**

$$1)\int\frac{x^2+8}{x^4+4x^2}dx;\qquad 2)\int\frac{x}{\sqrt{4+x}}dx;\qquad 3)\int_0^{\pi}x(\cos x)^2dx;$$

**ענה על 3 מתוך 4 השאלות 3 - 6 :**

**שאלה מס' 3 (15%)**

א) (12%) חשב את הגבולות הבאים:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin(2x)-\cos x}{\sin^2 x};\quad 2)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-4x+3}\right)$$

ב) (3%) עבור איזה ערך של $a$ מתקיים $\int_0^2\min(x,a)dx=1$ ?

**שאלה מס' 4 (15%)**

א) (12%) חשב את נפח של גוף סיבוב סביב ציר $x$ של הקו $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ בקטע [0, 4].

צייר את הסקיצה המתאימה.

ב) (3%) **על פי הגדרת הנגזרת כגבול** חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$.

**שאלה מס' 5 (15%)**

א) (12%) חשב את הערך הגדול ביותר של הפונקציה $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$. צייר את הסקיצה המתאימה.

ב) (3%) עבור אילו ערכים של $a$ לפונקציה $f(x)=\ln\left(x^2+ax+2\right)$ אין אסימפטוטות אנכיות?

**שאלה מס' 6 (15%)**

א) (12%) הוכח ששני הקווים $2x^3-y^3=xy$ ו- $\begin{cases}x=\dfrac{4}{\pi}arctg(2t)\\ y=\sin^3(\pi\cdot t)\end{cases}$ נפגשים בנקודה M(1,1) ומצא את הזווית בין הקווים האלה בנקודה זו.

ב) (3%) חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\ln 4}e^{2x}dx$. הסבר את המשמעות ההנדסית של האינטגרל באמצעות הסקיצה המתאימה.

**ענה על 1 מתוך 2 השאלות 7 - 8**

**שאלה מס'7 (10%)**

עבור אילו ערכים של $a$ הקווים $x^2+y^2=2ax; y=2x+2$ משיקים אחד לשני?

**שאלה מס' 8 (10%)** הוכח כי למשוואה $6x^6-6x^4+1=0$ אין פתרונות ממשיים.

*בהצלחה!*

# פתרון המבחן

## חדו"א 1

## תש"ע, סמסטר א'

## מועד ב

### שאלה 1

א)

$$f(x)=\frac{2-x^2}{e^x}$$

1) תחום הגדרה: כל $x\in R$

2) אין אסימפטוטה אנכית, כי אין נקודות אי הגדרה,

3) אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{e^x}=0$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{e^x}=-\infty$$

אין אסימפטוטה אופקית ב $-\infty$

4) אסימפטוטה משופעת

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{xe^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x^2)e^{-x}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2xe^{-x}-(2-x^2)e^{-x}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-2}{e^x}=\infty$$

אין אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$

5) תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

$$f'(x)=\frac{-2xe^x-(2-x^2)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-2x-2}{e^x}=0$$

$$x=1\pm\sqrt{3}$$

$$f'(x) \quad \begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \nearrow & 1-\sqrt{3} & \searrow & 1+\sqrt{3} & \nearrow \end{array}$$

תחומי עלייה: $x>1+\sqrt{3}$ או $x<1-\sqrt{3}$

תחומי ירידה: $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$

$x=1+\sqrt{3}$ - נקודת מינימום, $f(1+\sqrt{3})=-0.36$

$x=1-\sqrt{3}$ - נקודת מקסימום, $f(1-\sqrt{3})=3.04$

ב) תחומי קמירה ונקודות קיצון

$$f''(x)=\frac{(2x-2)e^x-(x^2-2x-2)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x^2+4x}{e^x}=\frac{x(4-x)}{e^x}=0$$

$$x=0,\ x=4$$

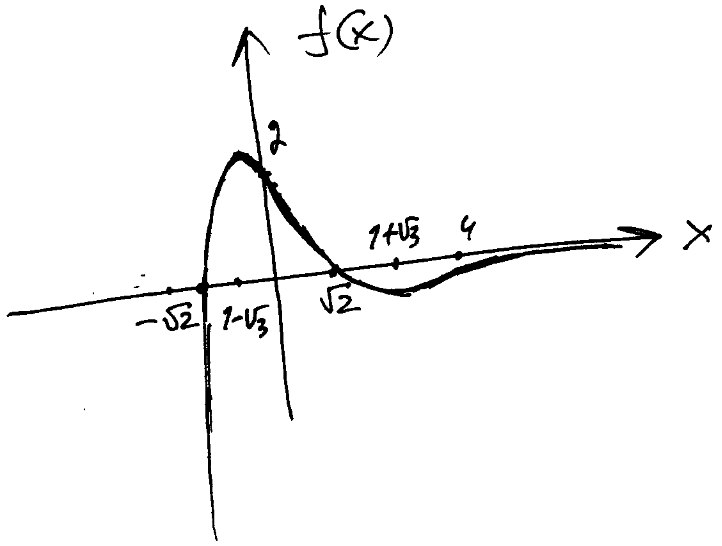
$$f''(x) \quad \begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \frown & 0 & \smile & 4 & \frown \end{array}$$

עבור $x>4$ ו $x<0$ $f(x)$ קמורה כלפי מטה

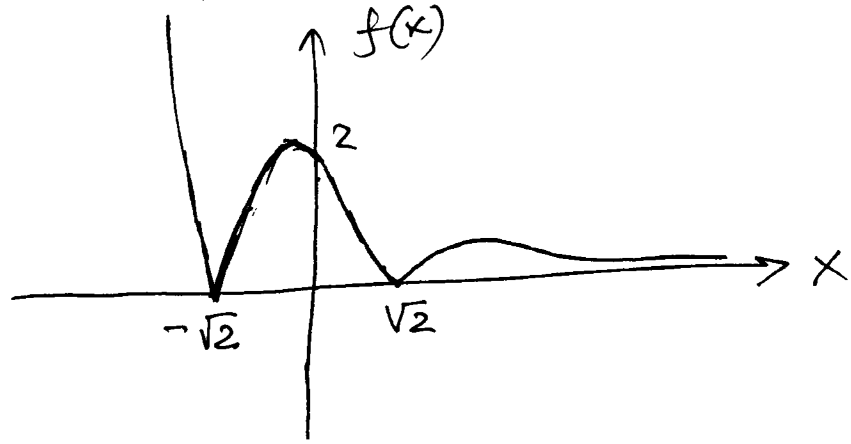
עבור $0<x<4$ $f(x)$ קמורה כלפי מעלה

$f(4)=-0.26$, $f(0)=2$

נקודות פיתול: $(0,2)$, $(4,-0.26)$



ק(




תרגיל 2

1) $\int \frac{x^2+8}{x^4+4x^2}\,dx = ?$

$$\frac{x^2+8}{x^4+4x^2} = \frac{x^2+8}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2 = x^2+8$$

מקדם של

| | |
|---|---|
| $A+C=0$ | $:x^3$ |
| $B+D=1$ | $:x^2$ |
| $4A=0$ | $:x$ |
| $4B=8$ | $:x^0$ |

לכן

$$D=-1,\ C=0,\ A=0,\ B=2$$

$$\int \frac{x^2+8}{x^2(x^2+4)}\,dx = \int \frac{2}{x^2}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x}}\,dx = ?$

$$t=\sqrt{4+x},\quad dt = \frac{1}{2t}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x}}\,dx = \int \frac{t^2-4}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int (t^2-4)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-4t\right)+C =$$

$$= \frac{2}{3}(4+x)^{3/2} - 8\sqrt{4+x} + C$$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} x\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,dx +$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dy =$$

$u = x$, $dv = \cos 2x\,dx$

$du = dx$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

## שאלה 3

א)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin 2x-\cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2x\cos 2x + \sin x}{2\sin x\cos x} =$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x + \cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{5}{2}$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{2}{(x-3)(x-1)}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

ב)

$$\int_0^2 \min(x,a)\,dx = 1$$

נתבונן בשלושה מקרים:

**מקרה 1** $a>2$.

ג/א

$$\int_0^2 \min(x,a)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2 \neq 1$$

**מקרה 2** $a<0$

$$\int_0^2 \min(x,a)\,dx = \int_0^2 a\,dx = ax\Big|_0^2 = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

לא מתאים למקרה $a<0$

**מקרה 3** $0<a<2$

$$\int_0^2 \min(x,a)\,dx = \int_0^a x\,dx + \int_a^2 a\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^a + ax\Big|_a^2 =$$

$$= \frac{a^2}{2} + 2a - a^2 = 1$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2+\sqrt{2},\quad a_2 = 2-\sqrt{2}$$

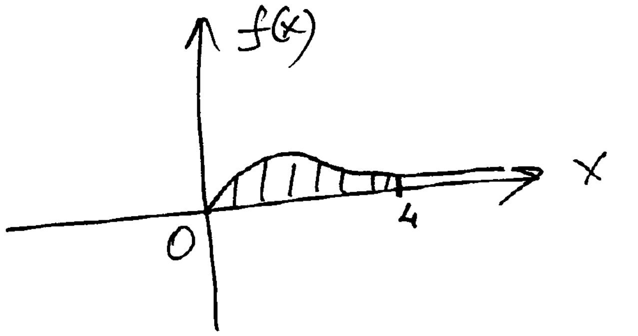
$a_1 \notin [0,2]$, לכן הפתרון: $\underline{a = 2-\sqrt{2}}$

**שאלה 4**

א)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x},\quad x \geq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 0,\quad f(0)=0$$



$$V=\pi\int_0^4\frac{x}{(1+x)^2}dx=\pi\int_0^4\frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx=\pi\int_0^4\frac{dx}{x+1}-$$

$$-\pi\int_0^4\frac{dx}{(x+1)^2}=\pi\ln|x+1|\Big|_0^4+\pi\cdot\frac{1}{x+1}\Big|_0^4=$$

$$=\pi\ln 5+\frac{\pi}{5}-\pi=\pi\left(\ln 5-\frac{4}{5}\right)$$

ב)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

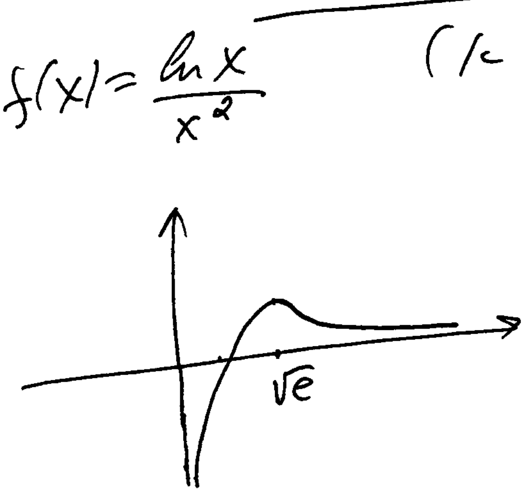
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

שאלה 5

א)

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2},\quad x>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0$$




$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=$$

$$=\frac{1-2\ln x}{x^3}=0,\quad \ln x=\frac{1}{2},\quad x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

$$f'(x)\quad \underset{\nearrow\quad\sqrt{e}\quad\searrow}{\overset{+\quad\quad -}{\overline{\quad\quad|\quad\quad}}}$$

$x=\sqrt{e}$ - נק' מקסימום,

$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$    מקסימום: $\frac{1}{2e}\approx 0.184$.

ב) לפי נתון, $f(x)=\ln(x^2+ax+2)$ יש
אסימפטוטה אנכית כאשר למשוואה $x^2+ax+2=0$ קיים שורש.
כ"א עבור $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-8}}{2}$.

לכן לא קיימת אסימפטוטה אנכית כאשר
$a^2-8<0$, כ"א $-\sqrt{8}<a<\sqrt{8}$

<u>שאלה 6</u>

א) נבדוק כי הנקודה $M(1,1)$ שייכת לקו $2x^3-y^3=xy$.
נציב $x=1$, $y=1$ $\Leftarrow$ $2\cdot1^3-1^3=1\cdot1$

נבדוק כי הנקודה $M(1,1)$ שייכת לקו השני:
$$1=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(2t) \Rightarrow \operatorname{arctg}(2t)=\frac{\pi}{4}$$
לכן $2t=tg\frac{\pi}{4}=1$ $\Leftarrow$ $t=\frac{1}{2}$

אז $y=\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. כלומר הנקודה $M(1,1)$ שייכת לקו הנ"ל.

נמצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הסתומה בנקודה $M$.
$$6x^2-3y^2y'=y+xy' \Rightarrow y'=\frac{6x^2-y}{x+3y^2},\ y'(1)=\frac{5}{4}$$

נמצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הפרמטרית

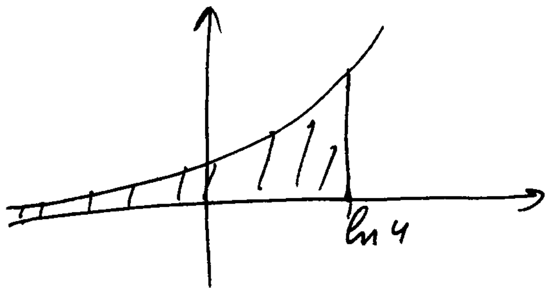
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2(\pi t)\cdot\cos(\pi t)\cdot\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{1}{1+4t^2}}$$

$$y'_x(1) = \frac{3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi}{\frac{8}{\pi\cdot 2}} = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{\left|\frac{5}{4}-0\right|}{\left|1+\frac{5}{4}\cdot 0\right|} = \frac{5}{4}$$

$$\alpha = arctg\,\frac{5}{4} = 0.9 \text{ Radian} \approx 51^\circ$$

ב)




מדובר בשטח של האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_{-\infty}^{\ln 4} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{\ln 4} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_a^{\ln 4}\right] =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(8-\frac{1}{2}e^{2a}\right) = 8$$

<u>שאלה 7</u>

נרשום את משוואת הקו $x^2+y^2=2ax$ בצורה הבאה:

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

ז"א בעצם משוואת המעגל עם רדיוס $|a|$ ומרכז בנקודה $M(a,0)$.

הקו הישר $y=2x+2$ יהיה משיק למעגל כאשר
הוא חותך את המעגל בנקודה אחת.
נמצא את נקודות החיתוך של הקו הישר עם
המעגל

$$x^2+(2x+2)^2=2ax \Rightarrow x^2+4x^2+8x+4=2ax$$

$$5x^2+(8-2a)x+4=0$$

$$x=\frac{(2a-8)\pm\sqrt{(2a-8)^2-80}}{10}$$

קיימת נקודת חיתוך אחת כאשר

$$(2a-8)^2-80=0 \Rightarrow 4a^2-32a+64-80=0$$

$$a^2-8a-4=0 \Rightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{64+16}}{2}=\frac{8\pm4\sqrt{5}}{2}=4\pm2\sqrt{5}$$

תשובה: $a_1=4+2\sqrt{5}$ , $a_2=4-2\sqrt{5}$

<u>שאלה 8</u>

$$6x^6-6x^4+1=0$$

נגדיר פונקציה $f(x)=6x^6-6x^4+1$

נמצא את תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון

$$f'(x)=36x^5-24x^3=36x^3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)=36x^3\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=0$$

| $x$ | | $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ו $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ נקודות מינימום מקומי

$$f\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)=f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\approx 0.11>0$$

משמאל לימין מנקודת המינימום הפונקציה עולה, לכן לכל x ממשי, $f(x)\geq f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)>0$.

לכן אין פתרונות ממשיים למשוואה $f(x)=0$