חדו"א-1 סמסטר א' תש"ע **מועד א'**

מרצה אחראי דר' סטיאנוב פבל. מרצים: פרופ' לויצקי שמעון, דר' אקרמן יבגניה, דר' אוחלוב אלכס, דר' דיצ'מן גדי, דר' אוברוצקי אושרית, דר' טופול מירב, דר' קלפר דביר, דר' מליץ' פינחס.
משך הבחינה 3 ש'. חומר עזר: דף נוסחאות של הסטודנט (שני עמודים בפורמט A4), מחשבון עם צג קטן.
לסטודנטים שמוענקת להם ההתאמה – ניתן להשתמש בכפל דפים (ללא צורך בחתימת המרצה). תשובה ללא הסבר אפילו נכונה לא תתקבל.

שאלות 1 ו- 2 –חובה!

שאלה מס' 1 (21%)

א) (18%) חקור באופן מלא את $f(x)=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף $y=f(x)$.

ב) (3%) צייר את סקיצת הגרף של הפונקציה $y=f(|x|)$ ל- $f(x)$ - מסעיף א'.

שאלה מס' 2 (24%) **פתור 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים :**

$$1)\int\frac{x-6}{x^3-9x^2}dx;\qquad 2)\int\frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx;\qquad 3)\int_0^{\pi}x^2\sin(2x)dx;$$

ענה על 3 מתוך 4 השאלות 3 - 6 :

שאלה מס' 3 (15%)

א) (12%) חשב את הגבולות הבאים: $1)\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}};\quad 2)\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

ב) (3%) עבור איזה ערך של a מתקיים $\int\limits_0^{\sqrt{a}}\max(x,2)dx=10$?

שאלה מס' 4 (15%)

א) (12%) חשב את שטח בין שני הקווים $y=e^x, y=e^{-x}$ בתחום $-\ln 2\le x\le\ln 2$.

צייר את הצורה במערכת הצירים.

ב) (3%) מצא את הפונקציה ההפוכה ל- $y=\ln^2 x$ בתחום $x>1$.

שאלה מס' 5 (15%)

א) (12%) חשב את הערך הגדול ביותר של הפונקציה $y=\sqrt{x}e^{-x}$. צייר את הסקיצה המתאימה.

ב) (3%) ידוע ש- $x^2-3x^3+x^4$ פולינום מקלורן של פונקציה $f(x)$. חשב את $f'''(0)$.

שאלה מס' 6 (15%)

א) (12%) מצא את הזווית בין שני המשיקים לקו $y^2-2xy+\ln x=3$ שמשיקים אותו בשתי נקודות שונות שבהן $x=1$.

ב) (3%) חשב את האינטגרל $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{4+x^2}$.

ענה על 1 מתוך 2 השאלות 7 - 8

שאלה מס'7 (10%)

מצא רדיוס של מעגל עיקום בנקודת מקסימום של הפונקציה $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ בקטע $t\in[0,2\pi]$.

שאלה מס' 8 (10%) לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $\ln x=a\sqrt{x}$ ישנם שני פתרונות ממשיים?

בהצלחה!

חדו"א 1 — מבחן סמסטר א' תש"ע (2009-2010)

מועד א'

תשובות

שאלה מס' 1

1 נק' $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$. תחום הגדרה $x\neq 3$

$f(x)=x-3+\frac{4}{x-3}$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-3}=0$.

3 נק' אסימפטוטה ב $\pm\infty$ הנה ישר $y=x-3$.

$\lim_{x\to 3^+}\left(x-3+\frac{4}{x-3}\right)=+\infty$

3 נק' $\lim_{x\to 3^-}\left(x-3+\frac{4}{x-3}\right)=-\infty$ $\Rightarrow$ $x=3$ אסימפטוטה אנכית

2 נק' גזירה: $f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^2-4}{(x-3)^2}$ $\quad (x-3)^2>4 \uparrow$ $\quad (x-3)^2<4 \downarrow$

פונקציה עולה בתחום $x>5 \cup x<1$

2 נק' פונקציה יורדת בתחום $3<x<5 \cup 1<x<3$

נקודת מינימום $x_{min}=5;\ y_{min}=4$

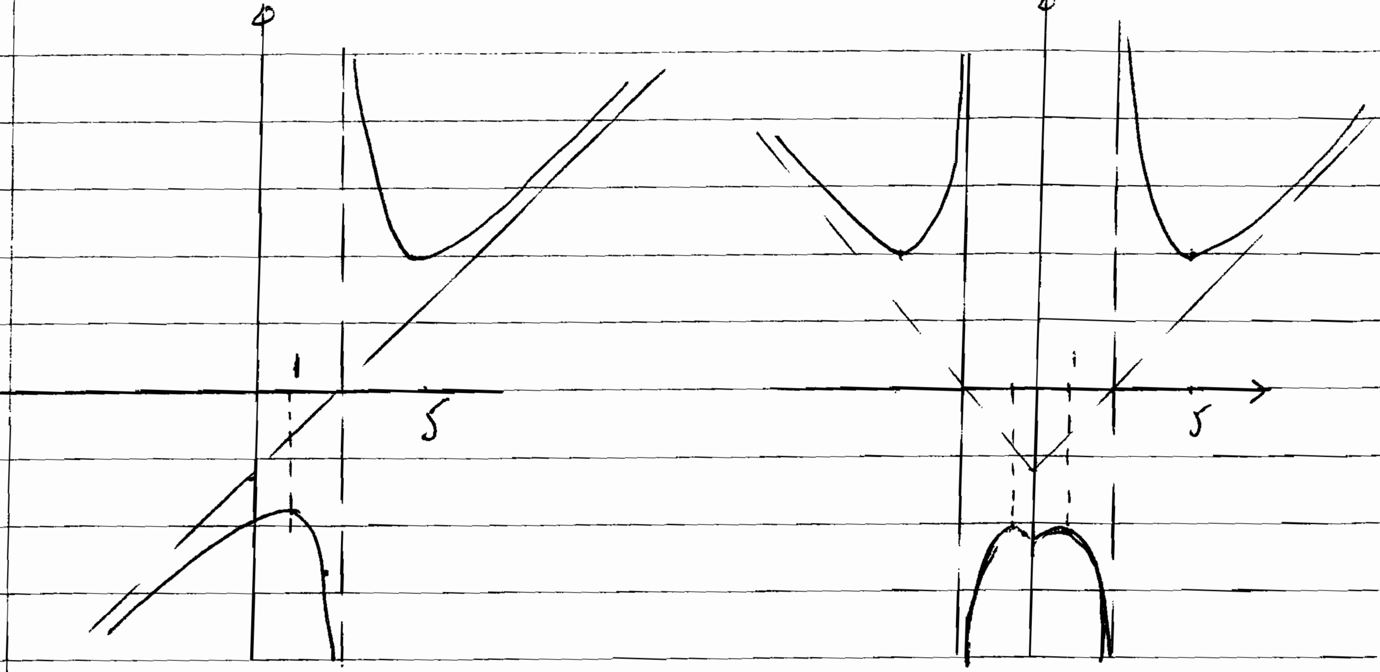
נקודת מקסימום $x_{max}=1;\ y_{max}=-4$

2 נק' גזירה: $f''(x)=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$

בתחום $x>3$ גרף קמור כלפי מעלה, ובתחום $x<3$ כלפי מטה.

1 נק' מסקנה: אין נק' פיתול.

4 נק'



ב) $y=f(|x|)$

3 נק'

שאלה מס' 2

1. $\int \frac{x-6}{x^3-9x^2}\,dx$

4 נק'

$$\frac{x-6}{x^2(x-9)} = \frac{\overset{x(x-9)}{A}}{x} + \frac{\overset{x-9}{B}}{x^2} + \frac{\overset{x^2}{C}}{x-9}$$

$$x-6 = x^2(A+C) + x(-9A+B) - 9B$$

$$A+C=0 \qquad -9A+B=1 \qquad -9B=-6$$

4 נק'

$$C=\frac{1}{27} \qquad A=-\frac{1}{27} \qquad B=\frac{2}{3}$$

$$\int \frac{x-6}{x^3-9x^2}\,dx = \int \left[-\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{x-9}\right]dx =$$

4 נק'

$$= -\frac{1}{27}\ln|x| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{27}\ln|x-9| + C =$$

$$= \frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-9}{x}\right| - \frac{2}{3x} + C.$$

2. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C =$

מחסבו $\begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}$ 6 נק'

$= \arcsin\frac{e^x}{2} + C$

6 נק'

4 נק'

3. $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x \, dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos 2x \, dx =$

4 נק'

$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x \, dx = \Big(-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x +$

$+\frac{1}{4}\cos(x)\Big)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{\pi^2}{2}$ 4 נק'

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$\sin 2x \, dx = dv$

$-\frac{1}{2}\cos 2x = v$

$x = u$

$dx = du$

$\cos 2x \, dx = dv$

$\frac{1}{2}\sin 2x = v$

שאלה 3

1. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -2}\frac{\frac{1}{3}(x-6)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}x^2(x^3+8)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3}$ 4 נק'

$= \lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^3+8)^{\frac{2}{3}}}{3x^2(x-6)^{\frac{2}{3}}} = \frac{0}{48} = 0$

2 נק'

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = [\infty]^0$

$y = (\ln x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln(\ln x) =$

$= \frac{\ln(\ln x)}{x}$ נ3

$\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} =$

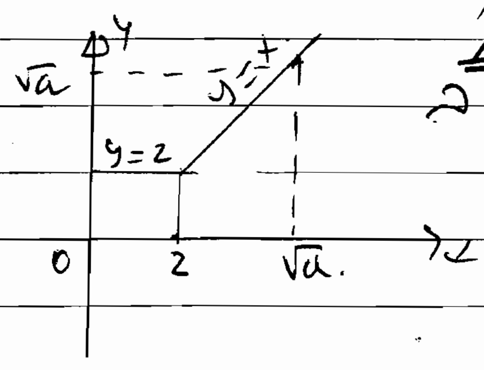
$= 0\cdot 0 = 0$ נ2

$\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln y} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y} = e^0 = 1$ נ1

נ3

$\int\limits_0^{\sqrt{a}} \max(x,2)\,dx = 10.$



1ק

$\int\limits_0^2 2\,dx + \int\limits_2^{\sqrt{a}} x\,dx = 10.$

$2x\Big|_0^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^{\sqrt{a}} = 10$

$4 + \frac{a}{2} - 2 = 10 \Rightarrow a = 16.$

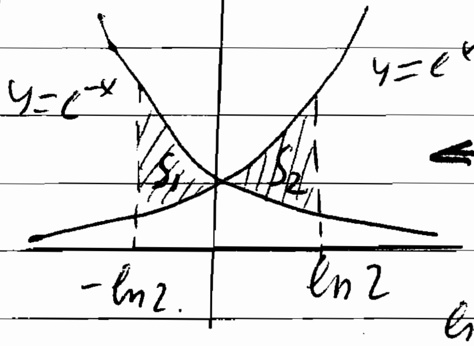
$2\times 2 + \frac{\sqrt{a}+2}{2}\cdot(\sqrt{a}-2) = 10$

$4 + \frac{a-4}{2} = 10.$

$a = 16.$

שאלה מס' 4

א)



$\longleftarrow$ 4 נק'

$$S_1 = S_2 = \int_0^{\ln 2} \underbrace{(e^{x}-e^{-x})}_{\text{4 נק'}}dx = (e^{x}+e^{-x})\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} - e^{0} - e^{0} = 2+\frac{1}{2}-1-1 = \frac{1}{2}$$

$$S = 2S_2 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$ 4 נק'

ב) 3 נק'

$x>1 \qquad y=\ln^2 x \Rightarrow y>0$

בתחום הנתון
פונקציה עולה מונוטונית
ובגלל זה היא הפיכה.

$\ln x = \sqrt{y} \Rightarrow x = e^{\sqrt{y}}$

$y = e^{\sqrt{x}}$

שאלה מס' 5

א) $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$ חשב את הערך הגדול ביותר

$x\geq 0 \quad y\geq 0$

$$y' = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = e^{-x}\cdot\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right)$$ 4 נק'

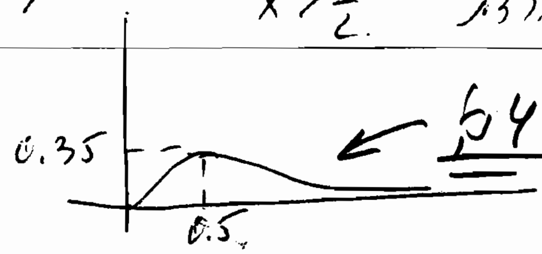
עולה: $0<x<\frac{1}{2}$

יורדת: $x>\frac{1}{2}$

$\max(0.5, 0.35) = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{0.5}}{e^{0.5}}\right)$

$\min(0,0)$

4 נק'



$\longleftarrow$ 4 נק'

ב) $P_4(x) = x^2 - 3x^3 + x^4$ 3 נק'

$$\frac{f'''(0)}{3!} = -3 \Rightarrow f'''(0) = -3 \cdot 6 = -18$$

שאלה 6

א) $y^2 - 2xy + \ln x = 3$

$x = 1$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -1$$

העקום עובר בין שתי נקודות!

$(1,3)$; $(1,-1)$ 2 נק'

$$2y \cdot y' - 2y - 2xy' + \frac{1}{x} = 0$$

$$y'(2y - 2x) = 2y - \frac{1}{x} = \frac{2xy - 1}{x}$$

$$y' = \frac{2xy - 1}{2 \cdot x\,(y - x)}$$ 6 נק'

$(1,3)$ $(1,-1)$

$$m_1 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 1 \cdot (3-1)} = \frac{5}{4} \qquad m_2 = \frac{2 \cdot (-1) - 1}{2 \cdot 1 \cdot (-1-1)} = \frac{3}{4}$$

$$tg\,\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}}\right| = \frac{1/2}{24/16} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 18{,}43^\circ$$ 4 נק'

3 נק'

6 חשב:

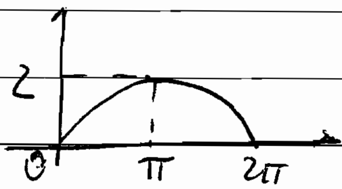
$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{4+x^2}=\lim_{a\to\infty}\int_2^{a}\frac{dx}{4+x^2}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_2^{a}=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{a}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\operatorname{arctg}1}_{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

שאלה מס' 7

$$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}\qquad t\in[0,2\pi]$$



$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=0$$

2 נק'

$$\sin t=0\qquad t=\pi k$$

$$t_1=0\qquad t_2=\pi\qquad t_3=2\pi$$

$$y''_x=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^3}=$$

$$=\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^3}$$

4 נק'

$$y''_x(t=\pi)=\frac{-1-1}{8}=-\frac{1}{4}<0.\Rightarrow \max(\pi;2)$$

2 נק'

$$R=\frac{1}{|f''(\pi)|}=4.$$

2 נק'

שאלה מס' 8 לאילו ערכים של פרמטר a

למשוואה $\ln x = a\sqrt{x}$ יש שני פתרונות ממשיים.

$$a = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

2 נק'

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad x>0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = 0$$

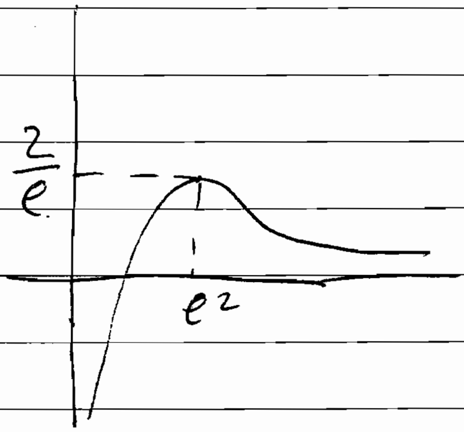
$$\ln x = 2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x} \qquad x = e^2$$

$$f''(e^2) = -\frac{1}{e^2} < 0 \quad max$$

6 נק'

$$max\left(e^2; \frac{2}{e}\right)$$



למשוואה $f(x)=a$

יש שני פתרונות

ממשיים אם:

$$0<a<\frac{2}{e}$$

4 נק'