שימושים ממשיים למספרים לא ממשיים

מאת פרופ' אלכסנדר לובוצקי

הצלחתה של המתמטיקה העיונית לתת מענה לשאלות שונות בעולם המעשה היא כיום מן המפורסמות שאינן צריכות ראיה. לעתים רעיונות מופשטים שפיתחו מתמטיקאים רק לשם החוויה האינטלקטואלית או לצרכים מתמטיים מופשטים נמצאו לבסוף שימושיים בפיזיקה, בכימיה, בהנדסה, במחשבים ועוד. דוגמה בולטת היא הגאומטרייה הלא־אוקלידית שפיתחו מתמטיקאים במאה התשע־עשרה, הרבה לפני שהפכה כלי יסודי בפיזיקה המודרנית. דוגמה מוחשית אחרת היא טרנספורם ראדון (Radon), שפותח ככלי מתמטי לחקר פונקציות והפך לכלי הבסיסי שאפשר את פיתוח מכשירי הדימות (imaging) המודרנית (קבלת תמונות של איברים בגוף באמצעי קרינה שונים).

היו לי הזכות והעונג להיות שותף בתהליך כזה. המילה עונג אינה נאמרת כאן לתפארת המליצה בלבד: החוויה האינטלקטואלית של ההבנה כיצד רעיונות מופשטים קורמים עור וגידים והופכים להיות משהו בעל משמעות בעולם המעשי היא גם חוויה רגשית עמוקה.

במאמר זה אנסה לתאר את השתלשלות הדברים (או שמא ראוי לומר את התגלגלות הדברים, כי חלק מההתפתחויות היו ללא כוונת מכוון).

נתחיל בפרק הראשון בהתפתחות המושג של **המספרים ה־p־אדיים**, שדה מספרים חדש שהתגלה, או הומצא (תלוי בתפיסתנו את רעיונות המתמטיקה המופשטת: כגילוי או כהמצאה), בסוף המאה התשע־עשרה בעקבות הבנה טובה יותר של המספרים הממשיים. בעקבות גילוי זה פיתחו מתמטיקאים רבים בהתמדה מושגים קלאסיים של המתמטיקה ה"רגילה" (מעל המספרים הממשיים) בעולם החדש של המספרים ה־p־אדיים, כגון תורת הפונקציות, נגזרות, אינטגרלים ואפילו גאומטרייה לא־אוקלידית. מהלכים אלו יתוארו בפרק השני.

בשנות השמונים של המאה הקודמת הראינו גרגורי מרגוליס (Margulis) במוסקבה מצד אחד ופיטר סרנק (Sarnak), אז באוניברסיטת סטנפורד (כיום במינוי משותף באוניברסיטת פרינסטון ובמכון ללימודים מתקדמים שם), רלף פיליפס ז"ל (Phillips) מאוניברסיטת סטנפורד ואנוכי מצד אחר, כיצד הגאומטרייה הלא־אוקלידית ה־p־אדית מובילה לבניית גרפים בעלי תכונות קיצון מיוחדות. את הגרפים האלה דרשו מדעני מחשב לצורך בניית רשתות תקשורת אופטימליות ולשימושים רבים אחרים. הפרק השלישי יספר את הסיפור הזה.

המתמטיקאי העיוני שואב את השראתו ואת המוטיבציה לעבודתו מתוך החוויה האסתטית של עבודתו, וזו בדרך כלל הבחינה העליונה של ◄

איכותה. עם זאת אין ספק שיש סיפוק מיוחד אם בסופו של דבר הרעיונות המופשטים מובילים לשימושים ארציים. כל סיפור שכזה גם מגבה את ציפייתה של האקדמיה מהחברה האזרחית לתמוך במחקר העיוני גם אם לא תמיד תועלתו המידית ברורה לכול.

1. המספרים ה־p־אדיים

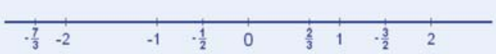
את המספרים הטבעיים, שהמתמטיקאים נוהגים לציין באות N, כולנו מכירים:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

כיום אנו חשים בנוח גם עם המספרים השלמים Z כולם, דהיינו הטבעיים בתוספת של אפס והמינוס של הטבעיים. מספרים אלו מתקבלים כאוסף כל ההפרשים $a - b$ כאשר a ו־b הם מספרים טבעיים:

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

אוסף כל המנות האפשריות של מספרים שלמים, דהיינו מנות מהצורה a/b כאשר a ו־b מספרים שלמים, מכונה "שדה המספרים הרציונליים" ומסומן ב־Q. נהוג ומקובל לחשוב ולסמן מספרים אלו על הקו הישר. ראו למשל בדוגמה הזאת:



סימנו כאן מספר קטן של מספרים רציונליים, חלקם שלמים וחלקם לא, אבל מובן שיש אינסוף שכאלה והם מהווים קבוצה צפופה על הישר.

כבר היוונים הקדמונים ידעו שלא כל המספרים על הישר הם רציונליים, למשל $\sqrt{2}$ – דהיינו השורש הריבועי של המספר 2 – אינו כזה, ולכן יש הוכחה קלה למדי. קשה יותר להראות ש־π, שהוא היחס בין היקף מעגל לקוטרו, אינו רציונלי (אף שלצורך חישובים מקורבים מתייחסים אליו לעתים כ־$^{22}/_{7}$, או כ־3.14, והמחמירים כ־3.14159, שהם מספרים רציונליים, אבל אף אחד מהקירובים האלה אינו מבטא את ערכו האמתי של π). בישר יש אפוא "חורים" רבים של מספרים לא רציונליים (במובן מסוים, "רוב" המספרים אינם רציונליים).

כלל המספרים על הישר נקראים "המספרים הממשיים", וקבוצת כולם מסומנת באות R. במאה התשע־עשרה הוטרדו המתמטיקאים מהגדרה זו של המספרים הממשיים, שהרי מהו למעשה הישר שאנחנו מדברים עליו? הגדרה מדויקת שלו תאמר שהוא "אוסף כל המספרים הממשיים". בכך הסתבכנו בהגדרה מעגלית...

הגדרה פורמלית ומדויקת של שדה המספרים הממשיים R מתקבלת כ"השלמה של שדה המספרים הרציונליים Q ביחס למטריקה הרגילה של Q". דהיינו, על שדה המספרים הרציונליים Q יש לנו מטריקה (= פונקציית מרחק) רגילה, המסומנת $dist$, שמודדת את המרחקים בין כל שני מספרים רציונליים, לדוגמה:

$$dist(5, -1) = 6, \qquad dist(^{8}/_{3}, 1) = {}^{5}/_{3}$$

וכדומה.

מתוך הקבוצה Q והמטריקה $dist$ ניתן להגדיר תהליך של השלמה שמוביל לקבוצה R. נדלג כאן על התיאור המדויק של תהליך זה (רק מתמטיקאים "יבשים" יכולים ליהנות מבנייה זו) ונתייחס אליו כאל קופסה שחורה: בהינתן קבוצה, למשל Q, עם מטריקה עליה, מתקבלת השלמה מתאימה.

בכך נפתחה קופסת פנדורה (חיובית!): יש מטריקות רבות על Q, נוסף על המטריקה הסטנדרטית שהוזכרה קודם.

נזכיר שמספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מ־1 שאינו ניתן לכתיבה כמכפלה של שני מספרים טבעיים קטנים ממנו. לדוגמה:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

הם שמונת המספרים הראשוניים הראשונים.

לכל מספר ראשוני p מתאימה פונקציית מרחק $dist_p$. נדלג על ההגדרה הפורמלית של פונקצייה זו ונציין רק שכשמדובר בשני מספרים שלמים a ו־b המרחק לפי מטריקה זו בין a ל־b הוא קטן אם $b-a$ מתחלק בחזקה גבוהה של p. לדוגמה, אם $p=2$, אזי המספרים 64 ו־65 אינם קרובים במטריקה $dist_p$ (למרות היותם קרובים במטריקה הרגילה). דווקא מתקיים ש־65 קרוב ל־1, ו־64, שהוא 2 בחזקת 6, קרוב ל־0, ו־128, שהוא 2 בחזקת 7, קרוב ל־0 אף יותר (!) חזקות גבוהות יותר של 2 ילכו ויתקרבו יותר ויותר ל־0 ולא לאינסוף כפי שאנחנו מורגלים במטריקה הרגילה. פונקציית מרחק זו נראית מוזרה, אבל לא לאנשי תורת המספרים: מספרים ש"קרובים" זה לזה במטריקה זו חולקים תכונות משותפות מסוימות (למשל, סיפה דומה בכתיבתם על פי בסיס p).

בין שאנו מוצאים עניין בפונקציית מרחק זו ובין שלא, היא קיימת (אם ניתן לומר על מושג מתמטי שהוא קיים, ולסוגיה זו לא ניכנס כאן). אפשר אפוא להכניס אתה יחד עם Q לקופסה השחורה של תהליך ההשלמה שהוזכרה קודם. התוצאה המונפקת היא Q_p – שדה המספרים ה־p־אדיים. זהו עולם חדש של מספרים, שדומה לעולם המספרים הממשיים במובנים מסוימים, אך שונה ממנו במובנים אחרים: הוא דומה ל־R באפשרות לבצע בו פעולות חיבור, כפל, חילוק וכד' כמו ב־R. כמו כן שניהם מכילים את Q, ו־Q צפופה בתוכם, דהיינו ניתן להתקרב לכל איבר כרצוננו באמצעות מספרים רציונליים.

אבל שדות אלו גם שונים זה מזה: ב־R, אם ניקח את 1 ונחברו לעצמו יותר ויותר פעמים, נלך ונתרחק מנקודת ההתחלה. לעומת זאת אם נבצע תהליך זה ב־Q_p, נישאר תמיד בסביבה של נקודת המוצא ולא נתרחק כלל. למה הדבר דומה? להולך על מסילת כושר שלמרות פסיעותיו וצעדיו המרובים נשאר כל הזמן באותו מקום.

למרות השוני הזה תהליכים מתמטיים רבים המתרחשים בעולם המספרים הממשיים ניתנים לביצוע גם בעולם ה־p־אדי, ועל כך בפרק הבא.

שתי הערות לפני שנעבור לפרק הבא: האחת – שדה ממשי יש רק אחד, אבל שדות p־אדיים יש אינסוף (לכל ראשוני p אנו מקבלים שדה אחר!). משפט של אלכסנדר אוסטרובסקי (Ostrowski) מ־1916 מבטיח ששדה המספרים R והשדות ה־p־אדיים Q_p הם ההשלמות היחידות האפשריות של שדה המספרים הרציונליים Q. לכן אין חשש (או תקווה, תלוי בעיני המתבונן) שבעתיד תופענה לנו לפתע עוד מערכות מספרים כאלה המשלימות את Q.

השנייה – בחרתי להציג כאן את המספרים ה־p־אדיים הצגה מופשטת כאנלוגיה למספרים הממשיים. אולם יש גם דרך אחרת להציגם, שהיא מופשטת פחות אבל דורשת שימוש בסימונים מתמטיים, שמהם העדפתי להימנע.

2. אנליזה וגאומטרייה מעל המספרים ה־ק־אדיים

משעה שהגדרנו את המספרים ה־p־אדיים, ניתן להפעיל עליהם את כל (או לפחות את רוב) הפרוצדורות שהמתמטיקאים הפעילו על המספרים הממשיים. לדוגמה, מושג הנגזרת של פונקצייה מוגדר אינטואיטיבית כשיפוע של העקום המתאר את הפונקצייה. אולם הגדרה מדויקת של הנגזרת $\frac{df}{dx}$ של הפונקצייה $f(x)$ היא הגבול של המנה $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ כאשר Δx הולך וקטן ל־0, כלומר קצב ההשתנות של הפונקצייה $f(x)$ בקרבת הערך x. למושג זה יש משמעות גם במספרים ה־p־אדיים. לכן אין בעיה להגדיר נגזרת גם לפונקציות p־אדיות. מכאן הדרך פתוחה גם להגדרת אינטגרלים, משוואות דיפרנציאליות ועוד ועוד.

נלך מכאן עוד צעד קדימה. הגאומטרייה האוקלידית שניסח אוקלידס לפני יותר מאלפיים שנה, תוך ביסוסה על כמה אקסיומות בסיסיות, נחשבה לאורך השנים לגאומטרייה הטבעית היחידה המתארת את עולם ◄

◄ הטבע. אולם המתמטיקאים חשו אי־נוחות באשר לאקסיומה החמישית, אקסיומת המקבילים. אקסיומה זו גורסת כי בהינתן קו ישר ונקודה מחוץ לקו, קיים במישור קו ישר מקביל יחיד לקו המקורי העובר דרך הנקודה. האינטואיציה הבסיסית שלנו על המישור אומרת שאקסיומה זו ודאי נכונה. המתמטיקאים לא חלקו על כך במשך דורות, אלא ניסו, לשווא, להוכיח אקסיומה זו מתוך האקסיומות האחרות.

בתחילת המאה התשע־עשרה התברר שאכן אין אפשרות להוכיח את אקסיומת המקבילים מתוך האקסיומות האחרות. יתר על כן, קיימת גאומטרייה אחרת – המישור ההיפרבולי – שבה מתקיימות כל האקסיומות האחרות, אבל בהינתן קו ישר ונקודה מחוצה לו, יש אינסוף קווים מקבילים לישר המקורי דרך הנקודה הנתונה. זה כמובן אומר שאי אפשר להוכיח את אקסיומת המקבילים מתוך האקסיומות האחרות, שאם לא כן היא הייתה תופסת גם במישור ההיפרבולי.

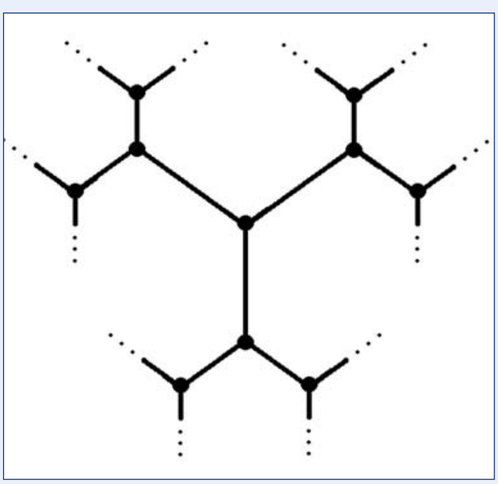
למרות היותה של גאומטרייה חדשה זו מוזרה בעיני מי שרגיל לחשוב במושגי הגאומטרייה האוקלידית, מתברר שלגאומטרייה ההיפרבולית חשיבות עצומה בפיזיקה. תורת היחסות מלמדת אותנו שתיאור נאמן יותר של המציאות בא דווקא מגאומטריות לא־אוקלידיות, כמו זו ההיפרבולית ואחרות שכמותה.

לענייננו חשוב לציין את החשיבות העצומה של הגאומטרייה ההיפרבולית במתמטיקה על ענפיה השונים: גאומטרייה, דינמיקה, תורת המספרים, תורת הפונקציות המרוכבות, תורת החבורות ועוד. תורה עשירה פותחה על אודות גאומטרייה זו. בין השאר ניתן "לקפל" את המישור ההיפרבולי בדרכים שונות, ומתקבל המושג החשוב של משטח רימן (Riemann surface), שהוא תחום מחקר רחב יריעה בעל השלכות על כל התחומים שהוזכרו לעיל. לא קל, אבל אפשרי, לתאר מישור היפרבולי גם לקורא שאינו מצוי בשפה המתמטית הטכנית. בדרך כלל נהוג לומר שהמישור ההיפרבולי הוא

"הגאומטרייה על פני אוכף". לא נרחיב בכיוון זה, כי למרבה הצער, אנו זקוקים למודל אחר של המישור ההיפרבולי. מודל זה מתקבל באמצעות "המטריצות מעל המספרים הממשיים עם דטרמיננטה 1 מודולו תת־חבורה חלקית קומפקטית מקסימלית".

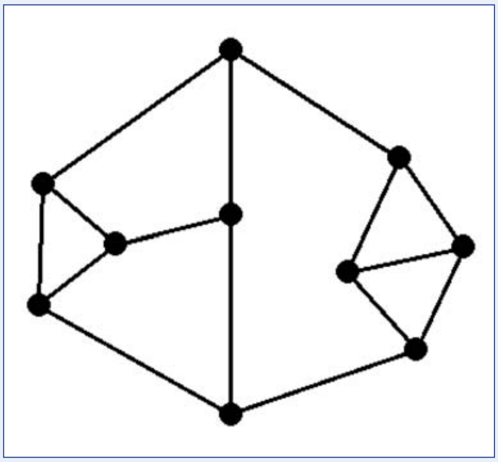
לא חשוב להבין כל מילה במשפט האחרון. להמשך הסיפור נחוץ רק להאמין שלמשפט זה יש משמעות גם אם מחליפים בתוכו את המילים "המספרים הממשיים" במילים "המספרים ה־p־אדיים".

זה בדיוק מה שעשו פרנסואה ברואט (Bruhat) וז'אק טיץ (Tits) בעבודתם החשובה בשנות השבעים של המאה הקודמת. הם פיתחו את האנלוג מעל ה־p־אדיים (באופן הרבה יותר כללי מהמתואר כאן, אבל לא כאן המקום להאריך) ויצרו את האפשרות לדבר על "המישור ההיפרבולי ה־p־אדי". כאן צפויה הפתעה: את המישור ההיפרבולי ה־p־אדי קל לתאר הרבה יותר מאשר את המישור ההיפרבולי הממשי: הוא פשוט עץ p־רגולרי. בפי המתמטיקאים "עץ" פירושו גרף של נקודות וביניהן קשתות, ואין בו אף לולאה אחת סגורה. הוא $(p+1)$־רגולרי אם מכל קדקוד של הגרף יוצאות בדיוק $p+1$ קשתות. לדוגמה, אם $p=2$, נקבל את העץ – 3־רגולרי. זהו העץ האינסופי המתואר בתרשים 1.



תרשים 1

◄ אבל אפשר להמשיך הלאה: כמו ש"קיפלנו" את המישור ההיפרבולי כדי לקבל משטחי רימן, כך ניתן, בהליך דומה, "לקפל" את העץ האינסופי הזה ולקבל גרפים סופיים $p+1$־רגולריים (שבהם, לעומת העץ, יש מסילות סגורות), כדוגמת הגרף בתרשים 2, כאשר $p=2$.

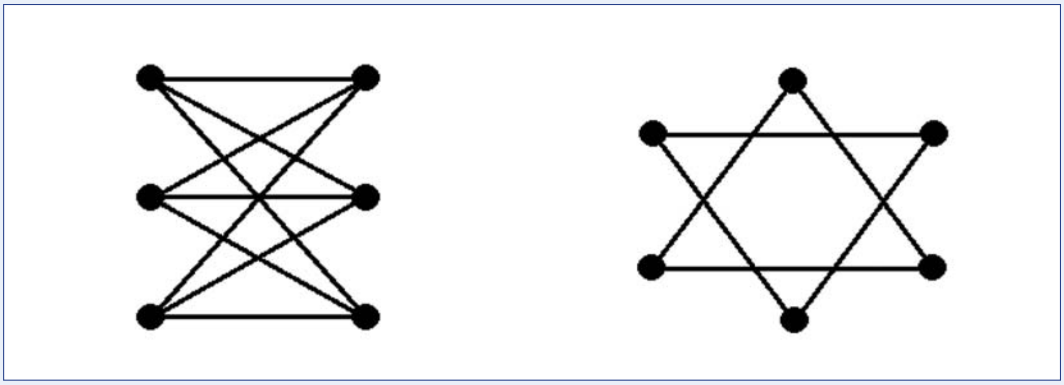


תרשים 2

למעשה כל גרף ($p+1$)־רגולרי ניתן להציגו כ"קיפול" של המישור ההיפרבולי ה־p־אדי. זו כמובן דרך מסובכת ביותר וחסרת תועלת ברוב המקרים.

3. גרפים מרחיבים

במתמטיקה גרף אינו אלא קבוצה של נקודות/קדקודים וקשתות המחברות בין הקדקודים. למשל:



לתורת הגרפים שימושים רבים במתמטיקה עיונית, במדעי המחשב ובעולם המעשה.
טבעי לייצג רשתות תקשורת בגרפים. לדוגמה, במחשב־על המורכב ממעבדים קטנים (מיקרופרוססורים) נסמן כל מעבד בקדקוד ונמתח קשת בין שני מעבדים המקושרים ביניהם והיכולים להעביר אינפורמציה מאחד לחברו. מחשבי־העל העתידיים צפויים להכיל הרבה מאוד מעבדים קטנים, ובעיית התקשורת ביניהם הופכת לבעיה מרכזית. אם במחשב יש n מעבדים, נאמר $n=1000$, הרי שכדי שכל שני מעבדים יוכלו לשוחח ביניהם, אנו נזקקים לקרוב לחצי מיליון קווי תקשורת ביניהם, ואין זה מעשי כל כך. לכן חיפשו מדעני המחשב ארכיטקטורה של רשת מעבדים שבה, נאמר, כל מעבד מקושר ל־20 מעבדים אחרים לכל היותר, ועדיין תהיה למערכת רמת קשירות גבוהה אף שיהיו בו רק 10,000 קווי תקשורת ולא חצי מיליון. בעיה זו ודומותיה הובילו להגדרת המושג "גרף מרחיב" (expander/אקספנדר): זהו גרף שאין בו קשתות רבות, ועם זאת במובנים מסוימים הוא דומה לגרף המלא שבו כל קדקוד מחובר לכל קדקוד. לא אלאה את הקורא בהגדרה הטכנית, אציין רק שבתחילה לא היה ברור שניתן למצוא גרפים כאלו. תכונת הדלילות של מספר הקשתות, מצד אחד, ותכונת הקשירות החזקה, מצד אחר, נדמות כתרתי דסתרי: תכונות שאולי אינן יכולות לדור בכפיפה אחת. מהר מאוד התברר שיש גרפים כאלו, אולם ההוכחה

הראשונה לקיומם הייתה הסתברותית. הוכח שאם נבנה במקרה וללא כל תכנון מוקדם גרף שבו 1,000 קדקודים, ובו מכל קדקוד יוצאות 20 קשתות, יש לו סיכוי מצוין להיות גרף מרחיב טוב, אבל אין לנו דרך טובה לבדוק זאת (!)

כעבור זמן מה התברר שגרפים מרחיבים חשובים אף יותר ממה שנראה בתחילת הדרך. מושג זה הפך לאבן יסוד בהרבה מאוד עבודות במדעי המחשב. רשתות תקשורת ואלגוריתמים רבים נבנו תוך התבססות על קיום אקספנדרים, וממילא גבר הצורך בבניות מפורשות של גרפים כאלו שיוכלו לתת מענה לצרכים השונים.

פריצת הדרך החשובה הראשונה הייתה של מרגוליס, בתחילת שנות השבעים. מרגוליס, מתמטיקאי רוסי ממוצא יהודי, שצמח להיות אחד מחשובי המתמטיקאים של דורנו (כיום פרופסור למתמטיקה באוניברסיטת Yale), לא קיבל משרה באוניברסיטת מוסקבה בשל האווירה האנטישמית שהורגשה היטב בחוגי האקדמיה הרוסית של אותן שנים, ונדחק למשרה שולית יחסית במכון המחקר Institute for Information Transmission, שבו עסקו במה שהיום נהוג לכנות מדעי המחשב התאורטיים. שם התוודע מרגוליס למושג של גרפים מרחיבים. הוא הבין שנושא שחברו ושותפו דוד קשדן (כיום חבר סגל באוניברסיטה העברית בירושלים) פיתח באותן שנים במסגרת "תורת ההצגות של חבורות", המכונה "תכונת T של קשדן", הוא כלי מתמטי המתאים לבניית גרפים מרחיבים. מאמר קצר שפרסם בנושא ב־1972 זכה לתהודה רבה בעולם, והיה הרמז הראשון ליכולתן של מתמטיקה עיונית בכלל ושל תורת ההצגות בפרט לסייע בפתרון בעיה חשובה זו במדעי המחשב.

הנושא של גרפים מרחיבים התפתח במהירות ובהתמדה בעזרת תרומות של מתמטיקאים שונים ברחבי העולם, ובהן תרומות חשובות של מתמטקאים ומדעני מחשב בישראל כמו צבי גליל, עופר גאבר, נוגה אלון, ויטלי מילמן ועוד. מאמץ רב הושקע במציאת גרפים מרחיבים טובים יותר ויותר. במיוחד חשובה לסיפורנו עבודתם של נוגה אלון וראבי בופנה (Ravi Boppana), שסימנה את הכיוון שאליו יש לחתור בחיפוש אחר גרפים מרחיבים מיטביים.

ארשה לעצמי לרגע להשתמש בשפה טכנית:

כל גרף שבו n קדקודים ניתן לייצוג באמצעות מטריצה nxn של אפסים ואחדים, המבטאת את יחס השכנות בגרף. אם דרגת כל קדקוד בגרף היא k, אזי הערכים העצמיים של מטריצה זו נמצאים כולם בין k (הערך העצמי הגדול ביותר) ל־$-k$. תוצאות של אלון–מילמן ואחרים הראו שהגרף x יהיה מרחיב טוב יותר ככל שהערך העצמי השני שלו $\lambda(X)$ (לאחר k) יהיה קטן יותר. משפט של אלון ובופנה אומר שאי אפשר לצפות (בשביל n גדול) לחסם טוב מ־$\lambda(X) \le 2\sqrt{k-1}$.

משפט זה נתן את האות לחיפוש אחר גרפים מרחיבים אופטימיליים, כלומר כאלו שבהם הערכים העצמיים, השונים מ־k, קטנים מ־$2\sqrt{k-1}$.

גרפים שכאלו ייקראו לאחר זמן "גרפי רמנוג'ן" (Ramanujan Graphs), לכבודו של המתמטיקאי ההודי האגדי סרינווסה רמנוג'ן (Srinivasa Ramanujan; חי בשנים 1887–1920), שעבודותיו והשערותיו מילאו לאחר שנים תפקיד חשוב בבניית גרפים שכאלה.

4. גרפים מרחיבים ומספרים ק־אדיים

מסענו וסיפורנו מתקרבים כאן לסיומם במפגש שבין פרק 2 לפרק 3: באמצע שנות השמונים. בערך באותו זמן התגבשה ההבנה, מצד אחד אצל מרגוליס במוסקבה ומצד אחר אצל פיליפס, סרנק ואנוכי, בפגישה בארצות הברית, שאת הגרפים המרחיבים האופטימליים יש לחפש דווקא בעולם המופשט של המספרים ה־p־אדיים. כזכור, בסוף פרק 2 תיארתי את מושג משטחי הרימן ה־p־אדיים וציינתי שאלה אינם אלא גרפים $p+1$־רגולריים, דהיינו מכל קדקוד יוצאות $p+1$ קשתות. אולם זהירות דרושה כאן! בדרך כלל גרפים אלו אינם גרפים מרחיבים (וודאי שאינם גרפי רמנוג'ן). אולם התברר שבחירה מושכלת ◄

של ה"קיפולים" של העץ כדי לקבל גרף, בחירה המבוססת על אריתמטיקה ועל תורת המספרים, יכולה להבטיח, תוך שימוש בעבודות מעמיקות של אריך הקה (Hecke) ופייר דלין (Deligne) בתורת המספרים, שהגרפים המתקבלים הם גרפים מרחיבים אופטימליים, דהיינו גרפי רמנוג'ן.

תקצר היריעה מלהסביר כאן את מלוא הסיפור, אולם לטובת הקורא הרגיש למספרים ובעל ההשכלה המתמטית אציין שבמקרה שבו דרגת הגרפים היא $k=p+1$, חסם רמנוג'ן, שהוזכר למעלה, הוא $2\sqrt{p}$. המספר $2\sqrt{p}$ מופיע במשפט המפורסם של אנדרה וייל (Weil), שהוכיח את "השערת רימן מעל שדות סופיים". מופע זה אינו מקרי: עבודתנו הסתמכה על עבודתו של דלין, וזו הסתמכה על זו של וייל.

פיליפס, סרנק ואנוכי צעדנו יחד צעד נוסף והצגנו את הגרפים המתקבלים הצגה מפורשת מאוד שניתנת בקלות לבנייה, וזאת תוך בחירה מסוימת מאוד של "קיפולי" העץ. בחירה זו התבססה על תורה קלאסית אחרת של אלגבראות קווטרניוניות. לא מעט מתמטיקה עמוקה שפיתחו כמה מגדולי המתמטיקאים של המאות התשע־עשרה והעשרים שוקעה בתוך עבודתנו. אנחנו היינו בני מזל לקטוף את פֵּרות עבודתם. התכבדנו בכך שהקהילה המתמטית החלה לכנות גרפים אלו גרפי LPS, ואלו התגלו כאוצר בלום, ובהמשך הדרך פתרו בעיות שונות בקומבינטוריקה ובתורת הגרפים.

אחד השימושים המפתיעים (והחביבים עליי) ביותר היא עבודתם של מיכאל סיפסר ודניאל ספילמן ב־1998 ב־MIT. הם השתמשו בגרפי LPS ליצירת מהפכה של ממש בתורת האינפורמציה באמצעות בניית "נוהלי תיקון שגיאות" מסוג חדש לגמרי. לעבודה זו השפעה עצומה על התפתחות התחום של תורת הקודים מתקני השגיאות. כשקיבל ספילמן ב־2010 את פרס Nevanlinna, מנתה, לא במקרה, ועדת הפרס עבודה זו כאחת מפסגות עבודתו המדעית.

כשבנינו את גרפי רמנוג'ן בשנות השמונים לא יכולנו לתאר את מארג השימושים שיהיו לגרפים אלו. לתחום מתמטי יש חיים משלו, והוא מתפתח בכיוונים שונים ומשונים. ראוי לציין שבשנים האחרונות מדעי המחשב משלמים את חובם למתמטיקה: עד לאחרונה הצורך בגרפים מרחיבים בא ממדעני מחשב, והמתמטיקאים סיפקו להם (בשמחה) דרכים ליצירתם. בשנים האחרונות החלו גרפים אלו למלא תפקיד מרכזי ומעניין גם בכמה תחומים של המתמטיקה העיונית כגון גאומטרייה, תורת המספרים ותורת החבורות. זהו אחד התחומים שבו המנשק בין מדעי המחשב למתמטיקה העיונית הוא פורה ביותר.

מה הלאה? קשה לנבא. בשנים האחרונות אחדים מאתנו בארץ ובעולם עוסקים בפיתוח תורה רב־ממדית של גרפים מרחיבים, ובכל פעם אנו מופתעים מחדש לגלות כיוונים וקשרים חדשים. אולי איננו צריכים להיות מופתעים כל כך, שהרי כבר אמר החכם מכל אדם בספר קהלת כי אי אפשר לכלוא את הרוח. רוח האדם ויכולת הדמיון שלו משתמשות בכלים המתמטיים לפרוץ ולהתרחב כל פעם לטריטוריות חדשות ומפתיעות. חש אני בר מזל להיות חלק מתנועה זו. ■

תודתי נתונה לה' פורסטנברג, ד' הראל וב' לובוצקי על הערות מועילות.

אלכסנדר לובוצקי, מכון איינשטיין למתמטיקה, האוניברסיטה העברית בירושלים. המאמר מבוסס על הרצאת הבכורה שניתנה באקדמיה ב־23/12/14